Devoir maison n° 11

À rendre le lundi 4 février 2019

Il possible et même encouragé de travailler en groupes de 2 ou 3 élèves et de me rendre une copie par groupe. Chaque élève du groupe devra avoir rédigé une partie du sujet.

Exercice 1 : Inversibilité de la matrice de Hilbert

Extrait du DS n° 5 de l'an passé.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Autrement dit, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le coefficient d'indice (i,j) de H est $h_{i,j} = \dfrac{1}{i+j-1}$.

Partie A : Cas où $n=2$ ou $n=3$

1) Former la matrice H dans le cas $n=2$. Justifier qu'elle est inversible et expliciter H^{-1}.
2) Former la matrice H dans le cas $n=3$. A l'aide de la méthode de Gauss-Jordan, montrer qu'elle est inversible et expliciter H^{-1}.

   Pour éviter de manipuler des fractions, on pourra montrer que $60H$ est inversible et remarquer que $H^{-1} = 60 \cdot (60H)^{-1}$. Même si les nombres apparaissant dans les matrices pourront avoir trois chiffres, le calcul est tout à fait accessible et le mener jusqu'au bout sera récompensé. La méthode de Gauss-Jordan doit être respectée à la lettre et toutes les opérations devront obligatoirement apparaitre sur la copie.

Partie B : Cas général

L'objectif de cette partie est de montrer que H est inversible, quelque soit sa taille. Pour cela on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on se donne $X = {}^t\!\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $HX = \mathrm{O}_{n,1}$.

1) Que doit-on montrer concernant $x_1, \dots, x_n$ pour en déduire que H est inversible ?
2) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Écrire, sous forme de somme, la $i^{\text{ème}}$ ligne du système d'équations correspondant à l'équation $HX = \mathrm{O}_{n,1}$.
3) Introduisons le polynôme $P(X) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j L_{j-1}(X)$ où, pour tout $j \in [\![0,n-1]\!]$, $L_j(X) = \displaystyle\prod_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ k \neq j}} (X+k)$.

   Autrement dit

$$\begin{aligned} P(X) = x_1(X+1)(X+2)\cdots(X+n-1) + x_2 X(X+2)(X+3)\cdots(X+n-1) \\ + x_3 X(X+1)(X+3)\cdots(X+n-1) + x_n X(X+1)(X+2)\cdots(X+n-2) \end{aligned}$$

   a) Soient $j \in [\![0,n-1]\!]$ et $i \in [\![1,n]\!]$. Écrire $L_j(i)$ sous la forme $\dfrac{\alpha}{\beta(i+j)}$ où α et β sont des factorielles que l'on précisera.
   b) Que dire sur le degré de P ?

c) Calculer $P(i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. En déduire que P est le polynôme nul.

d) Montrer que $P(-i+1) = L_{i-1}(1-i)\, x_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

e) Conclure.

Partie C : Calcul de la somme des coefficient de H^{-1}

Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, notons $s_{i,j}$ le coefficient d'indice (i, j) de H^{-1}. L'objectif de cette partie est de calculer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} s_{i,j}$, c'est-à-dire la somme des coefficient de H^{-1}.

1) Calculer la somme des coefficients de H^{-1} dans le cas où $n = 2$ et $n = 3$.

2) Soit U la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, notons y_k le $k^{\text{ième}}$ coefficient de la matrice $Y = H^{-1}U$. Montrer que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} s_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} y_i$.

3) Introduisons les polynômes $S(X) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j L_{j-1}(X)$ et $Q(X) = S(X) - \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X+k)$.

   a) Calculer le degré de Q et son coefficient dominant.

   b) Calculer $Q(i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

   c) En déduire une factorisation de Q.

4) a) Calculer le coefficient d'indice $n-1$ du polynôme $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X+k) - \prod_{k=1}^{n}(X-k)$.

   b) En calculant le coefficient d'indice $n-1$ de S, en déduire que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} s_{i,j} = n^2$.

Exercice 2 : Que du classique !

1) Montrer que $F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} x + 2y = z - 4t \\ y + 3t = 5z \end{array} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base.

2) Soit F le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1, 5, 1)$ et $(4, -1, -3)$. Déterminer une équation de F (c'est-à-dire une équation vérifiée par tous les vecteurs (x, y, z) de F).

Exercice 3 : Étude d'un sous-espace vectoriel de matrices

Exercice 18 du TD n° 18.

Introduisons $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

1) Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2) Déterminer une base $\mathcal{B}$ (*la plus simple possible*) de $\mathcal{A}$.

3) A l'aide de la méthode de Gauss, montrer que $\mathcal{A} \cap \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) = \varnothing$.

4) Soit $M \in \mathcal{A}$.

   a) Calculer M^2 et M^3. Remarquer que $M^3 \in \mathcal{A}$.

   b) Exprimer les coordonnées de M^3 dans la base $\mathcal{B}$ en fonction des coordonnées de M.

   c) En déduire un polynôme annulateur de M.

   d) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer M^k en fonction de k, M, M^2 et des coordonnées de M dans la base $\mathcal{B}$.