Correction du DM n° 10

Exercice 1 : Application des intégrales de Wallis au calcul de $\zeta(2)$

Partie A : Convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$. Ainsi $\boxed{(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante.}}$

2) Soit $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Pour tout $t \in [k-1,k]$, $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ donc $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}$.

On conclut en remarquant que $\boxed{\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{k^2} = \frac{1}{k^2}\int_{k-1}^{k} 1\,dt = \frac{k-(k-1)}{k^2} = \frac{1}{k^2}.}$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, d'après la question précédente et la relation de Chasles,

$$\boxed{S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2} = 1 + \int_{1}^{n} \frac{dt}{t^2}.}$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $\displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t^2} = \left[\frac{-1}{t}\right]_1^n = 1 - \frac{1}{n} \leqslant 1$ d'où $S_n \leqslant 2$. Ainsi $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante et majorée. Le théorème de la limite monotone entraîne que $\boxed{(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers un réel } \ell.}$
Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $1 < \dfrac{5}{4} = S_2 \leqslant S_n \leqslant 2$, nous obtenons $\boxed{1 < \ell \leqslant 2.}$

Partie B : Calcul de $\zeta(2)$ avec les intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les foncions $t \longmapsto \cos^n(t)$ et $t \longmapsto t^2\cos^n(t)$ sont continues sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc les intégrales I_n et W_n sont bien définies.

1) On a $\displaystyle W_0 = \int_0^{\pi/2} \cos^0(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} 1\,dt = \frac{\pi}{2}$, $\displaystyle I_0 = \int_0^{\pi/2} t^2\cos^0(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi/2}$ donc $\boxed{W_0 = \dfrac{\pi}{2}\ ,\ I_0 = \dfrac{\pi^3}{24}}$ et donc $\boxed{A_0 = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{I_0}{W_0} = I_0 = \dfrac{\pi^3}{24}.}$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Faisons une intégration par parties avec les fonctions $u_1 : t \longmapsto t$ et $v_1 : t \longmapsto \cos^{2n}(t)$ de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a $u_1' : t \longmapsto 1$ et $v_1' : t \longmapsto -2n\sin(t)\cos^{2n-1}(t)$ et

$$\begin{aligned} W_{2n} = \int_0^{\pi/2} u_1'(t)v_1(t)\,dt &= \left[t\cos^{2n}(t)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -2nt\sin(t)\cos^{2n-1}(t)\,dt \\ &= \boxed{2n\int_0^{\pi/2} t\sin(t)\cos^{2n-1}(t)\,dt} \end{aligned}$$

Pour calculer cette dernière intégrale, faisons une intégration par parties avec les fonctions $u_2 : t \longmapsto \dfrac{t^2}{2}$ et $v_2 : t \longmapsto \sin(t)\cos^{2n-1}(t)$ de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a $u_2' : t \longmapsto t$ et

$$\begin{aligned} \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad v_2'(t) &= -(2n-1)\sin^2(t)\cos^{2n-2}(t) + \cos^{2n}(t) \\ &= -(2n-1)\big(1-\cos^2(t)\big)\cos^{2n-2}(t) + \cos^{2n}(t) \\ &= -(2n-1)\cos^{2n-2}(t) + 2n\cos^{2n}(t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} t\sin(t)\cos^{2n-1}(t)\,dt &= \int_0^{\pi/2} u_2'(t)v_2(t)\,dt \\
&= \left[\frac{t^2}{2}\sin(t)\cos^{2n-1}(t)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\frac{t^2}{2}\left(2n\cos^{2n}(t)-(2n-1)\cos^{2n-2}(t)\right)dt \\
&= (2n-1)\int_0^{\pi/2}\frac{t^2}{2}\cos^{2n-2}(t)\,dt - 2n\int_0^{\pi/2}\frac{t^2}{2}\cos^{2n}(t)\,dt = \frac{2n-1}{2}I_{2n-2}-nI_{2n}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{W_{2n} = 2n\left(\frac{2n-1}{2}I_{2n-2}-nI_{2n}\right) = n(2n-1)I_{2n-2}-2n^2I_{2n}.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
A_{n-1}-A_n = \frac{\pi}{2}\frac{I_{2n-2}}{W_{2n-2}} - \frac{\pi}{2}\frac{I_{2n}}{W_{2n}} &= \frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)I_{2n-2}}{2nW_{2n}} - \frac{\pi}{2}\frac{I_{2n}}{W_{2n}} \\
&= \frac{\pi}{4n^2W_{2n}}\left(n(2n-1)I_{2n-2}-2n^2I_{2n}\right) = \boxed{\frac{\pi}{4n^2}.}
\end{aligned}$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, via une somme télescopique,

$$\boxed{I_0 - A_n = A_0 - A_n = \sum_{k=1}^{n}(A_{k-1}-A_k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{4k^2} = \frac{\pi}{4}S_n.}$$

3) a) Soit $\varphi : t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longmapsto \sin(t) - \frac{2t}{\pi}$. Il s'agit d'une fonction dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\varphi' = \cos - \frac{2}{\pi}$. La fonction φ' est continue et décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et, puisque $\varphi'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0$ et $\varphi'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{2}{\pi} < 0$, le TVI entraîne qu'il existe $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\varphi' \geqslant 0$ sur $[0, \alpha]$ et $\varphi' \leqslant 0$ sur $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$. Nous en déduisons que φ est croissante sur $[0,\alpha]$ et décroissante sur $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$. Enfin $\varphi(0) = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ si bien que $\varphi(t) \geqslant 0$ et donc $\boxed{\sin(t) \geqslant \frac{2t}{\pi} \text{pour tout } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].}$

b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a $\sin^2(t) \geqslant \frac{4t^2}{\pi^2}$ donc $0 \leqslant \cos^{2n}(t) = (1-\sin^2(t))^n \leqslant \left(1 - \frac{4t^2}{\pi^2}\right)^n$.
De plus $0 \leqslant t^2 \leqslant \frac{\pi t}{2}$ donc $t^2\cos^{2n}(t) \leqslant \frac{\pi t}{2}\left(1-\frac{4t^2}{\pi^2}\right)^n$.

Puisque les fonctions $t \longmapsto t^2\cos^{2n}(t)$ et $t \longmapsto \frac{\pi t}{2}\left(1-\frac{4t^2}{\pi^2}\right)^n$ sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\boxed{I_{2n} \leqslant \int_0^{\pi/2}\frac{\pi t}{2}\left(1-\frac{4t^2}{\pi^2}\right)^n dt.}$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. Effectuons le changement de variables $x = 1 - \frac{4t^2}{\pi^2}$ de classe C^1 sur $[0,1]$ (on a $x = 0$ lorsque $t = \pi/2$ et $x = 1$ lorsque $t = 0$). On a « $dx = -\frac{8t}{\pi^2}\,dt$ » et donc

$$\int_0^{\pi/2} t\left(1-\frac{4t^2}{\pi^2}\right)^n dt = \int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{4t^2}{\pi^2}\right)^n \frac{-\pi^2}{8}\frac{-8t}{\pi^2}\,dt = \int_1^0 x^n\frac{-\pi^2}{8}\,dx = \frac{\pi^2}{8}\int_0^1 x^n\,dx = \frac{\pi^2}{8(n+1)}.$$

Ainsi $\boxed{I_{2n} \leqslant \frac{\pi^3}{16(n+1)}.}$

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant A_n = \frac{\pi}{2} \frac{I_{2n}}{W_{2n}} \leqslant \frac{\pi^3\sqrt{n}}{16(n+1)} \frac{\pi}{2\sqrt{n}W_{2n}} \leqslant \frac{\pi^3\sqrt{\pi}}{16\sqrt{n}} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}W_{2n}}.$$

On sait que $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}W_{2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et on a $\dfrac{\pi^3\sqrt{\pi}}{16\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par encadrement, nous obtenons que $\boxed{(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$

6) Nous en déduisons que $S_n = \dfrac{4}{\pi}(I_0 - A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{4}{\pi} I_0 = \dfrac{\pi^2}{6}$. Ainsi $\boxed{\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}.}$

Exercice 2 : Factorisation de polynômes

1) Un complexe z est une racine de $X^{12} - 1$ si et seulement si $z^{12} = 1$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$ et $z^{12} = 1$.

Or, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $(e^{i\theta})^{12} = 1$ si et seulement $12\theta \equiv 0\,[2\pi]$ si et seulement il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \dfrac{k\pi}{6}$. Nous en déduisons que z est une racine de $X^{12} - 1$ si et seulement si

$$z \in \{1, e^{i\pi/6}, e^{i\pi/3}, e^{i\pi/2}, e^{2i\pi/3}, e^{5i\pi/6}, -1, e^{7i\pi/6}, e^{4i\pi/3}, e^{3i\pi/2}, e^{5i\pi/3}, e^{11\pi/6}\},$$

c'est-à-dire

$$z \in \{1, -1, e^{i\pi/6}, e^{-i\pi/6}, e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}, i, -i, e^{2i\pi/3}, e^{-2i\pi/3}, e^{5i\pi/6}, e^{-5i\pi/6}\}.$$

Ainsi $X^{12} - 1$ admet exactement 12 racines distinctes (les racines douzièmes de l'unité...) dans $\mathbb{C}[X]$:

$$\boxed{\begin{aligned} X^{12} - 1 = (X+1)(X-1)(X - e^{i\pi/6})(X - e^{-i\pi/6})(X - e^{i\pi/3})(X - e^{-i\pi/3}) \\ (X-i)(X+i)(X - e^{2i\pi/3})(X - e^{-2i\pi/3})(X - e^{5i\pi/6})(X - e^{-5i\pi/6}). \end{aligned}}$$

On regroupe les racines non réelles avec leur conjugué :

$$\begin{aligned} X^{12} - 1 = (X+1)(X-1)(X^2 - 2\cos(\pi/6)X + 1)(X^2 - 2\cos(\pi/3)X + 1) \\ (X^2+1)(X^2 - 2\cos(2\pi/3)X + 1)(X^2 - 2\cos(5\pi/6)X + 1). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{X^{12} - 1 = (X+1)(X-1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2+1)(X^2 + X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1).}$$

2) On remarque d'abord que 0 est une racine évidente. Ensuite on a

$$P(j) = j^5 - 3j^4 + 10j^3 + 9j^2 + 13j = j^2 - 3j + 10 + 9j^2 + 13j = 10(j^2 + j + 1) = 0.$$

Puisque $P \in \mathbb{R}[X]$, on en déduit que $j^2 = \overline{j}$ est encore une racine de P. Il existe donc un polynôme Q de degré 2 tel que $P = X(X-j)(X-\overline{j})Q$. Pour trouver Q on peut effectuer la division euclidienne de P par $X(X-j)(X-\overline{j}) = X^3 + X^2 + X$. On trouve $Q = X^2 - 4X + 13$.

Le trinôme Q admet pour discriminant $-36 = (6i)^2$. Il admet deux racines complexes $\dfrac{4+6i}{2} = 2 + 3i$ et $\dfrac{4-6i}{2} = 2 - 3i$ et donc $Q = (X - 2 + 3i)\,(X - 2 - 3i)$.

Finalement, dans $\mathbb{C}[X]$, $\boxed{P = X(X-j)(X-\overline{j})\,(X-2+3i)\,(X-2-3i)}$.

Et, dans $\mathbb{R}[X]$, $\boxed{P = X(X^2 + X + 1)(X^2 - 4X + 13)}$.

Partie B : Premières propriétés des polynômes de Tchebychev

1) a) • Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $1 = \cos(0 \times \theta)$ donc, par unicité, $\boxed{T_0 = 1}$.

• Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) = \cos(1 \times \theta)$ donc, par unicité, $\boxed{T_1 = X}$.

• Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\big(T_{n+2} + T_n\big)(\cos(\theta)) = \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) &= 2\cos\left(\frac{(n+2)\theta + n\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+2)\theta - n\theta}{2}\right)\\ &= 2\cos\left((n+1)\theta\right)\cos\left(\theta\right) = 2\cos(\theta)T_{n+1}(\theta).\end{aligned}$$

Ainsi $\big(T_{n+2} - 2XT_{n+1} + T_n\big)(\cos(\theta)) = 0$. Ainsi $T_{n+2} - 2XT_{n+1} + T_n$ admet une infinité de racines (tous les réels de $[-1, 1]$, puisque $\cos$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$) et donc il s'agit du polynôme nul. Ainsi $\boxed{T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.}$

b) On a :

• $T_2 = 2XT_1 - T_0$ donc $\boxed{T_2 = 2X^2 - 1}$,

• $T_3 = 2XT_2 - T_1 = 2X(2X^2 - 1) - X$ donc $\boxed{T_3 = 4X^3 - 3X}$,

• $T_4 = 2XT_3 - T_2 = 2X(4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1)$ donc $\boxed{T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1}$,

• $T_5 = 2XT_4 - T_3 = 2X(8X^4 - 8X^2 + 1) - (4X^3 - 3X)$ donc $\boxed{T_5 = 16X^5 - 20X^3 + 5X}$.

2) Montrons par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\deg(T_n) = n}$ et le coefficient dominant de T_n est $\boxed{a_n = 2^{n-1}}$.

• *Initialisation* : On a $T_1 = X$ donc $\deg(T_1) = 1$ et $a_1 = 1 = 2^{1-1}$. On a $T_2 = 2X^2 - 1$ donc $\deg(T_2) = 1$ et $a_2 = 2 = 2^{2-1}$. Ainsi la propriétés est vrai aux rangs 1 et 2.

• *Hérédité* : Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété soit vraie aux rangs n et $n+1$, c'est-à-dire $\deg(T_n) = n$, $a_n = 2^{n-1}$, $\deg(T_{n+1}) = n+1$, $a_{n+1} = 2^n$. On a alors $\deg(2XT_{n+1}) = 1 + \deg(T_{n+1}) = n+2 > \deg(T_n)$ donc

$$\deg(T_{n+2}) = \deg(2XT_{n+1} - T_n) = \max(\deg(2XT_{n+1}), \deg(T_n)) = n+2$$

et a_{n+2} est le coefficient de $2XT_{n+1}$), c'est-à-dire $2 \times 1 \times 2^n = 2^{n+1}$. Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$.

D'où le résultat par récurrence.

3) • *Méthode 1 :* Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$,

$$T_n(-\cos(\theta)) = T_n(\cos(\pi + \theta)) = \cos(n(\pi + \theta)) = (-1)^n \cos(n\theta) = (-1)^n T_n(\cos(\theta)).$$

Ainsi $T_n(-X) - (-1)^n T_n(X)$ est un polynôme ayant une infinité de racines. On en déduit qu'il s'agit du polynôme nul. Ainsi $\boxed{T_n \text{ est pair (resp. impair) si } n \text{ est pair (resp. impair)}}$.

• *Méthode 2 :* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons (P_n) la propriété « T_{2n} est pair et T_{2n+1} est impair ». Montrons cette propriété par récurrence.

— $T_0 = 1$ est pair et $T_1 = X$ est impair. Ainsi (P_0) est vraie.

— Supposons que (P_n) soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On a

$$T_{2(n+1)}(-X) = 2(-X)T_{2n+1}(-X) - T_{2n}(-X) = 2XT_{2n+1}(X) - T_{2n}(X) = T_{2(n+1)}(X)$$

donc $T_{2(n+1)}$ est pair. Ensuite

$$T_{2(n+1)+1}(-X) = 2(-X)T_{2n+2}(-X) - T_{2n+1}(-X) = -2XT_{2n+2}(X) + T_{2n+1}(X) = -T_{2(n+1)+1}$$

donc $T_{2(n+1)+1}$ est impair.

D'où la propriété par récurrence.

4)
- On a $T_n(-1) = T_n(\cos(\pi)) = \cos(n\pi)$ donc $\boxed{T_n(1) = (-1)^n}$.
- On a $T_n(1) = T_n(\cos(2\pi)) = \cos(n2\pi)$ donc $\boxed{T_n(1) = 1}$
- On a $T_n(0) = T_n\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ donc $\boxed{T_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ (-1)^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}}$

5) Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{T_n(T_p(\cos(\theta))) - T_p(T_n(\cos(\theta))) = T_n(\cos(p\theta)) - T_p(\cos(n\theta)) = \cos(np\theta) - \cos(pn\theta) = 0.}$$

Ainsi $T_p \circ T_n - T_n \circ T_p$ admet une infinité de racines dans $\mathbb{R}$ (tous les réels de $[-1, 1]$, puisque $\cos$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$). Il s'agit donc du polynôme nul. Ainsi $\boxed{T_p \circ T_n = T_n \circ T_p}$.

6) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction T_n est un polynôme donc elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $\cos$ est aussi deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Nous en déduisons que $f_n = T_n \circ \cos$ également. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $f_n'(\theta) = -\sin(\theta) \cdot T_n'(\cos(\theta))$ puis

$$\begin{aligned} f_n''(\theta) &= -\cos(\theta) \cdot T_n'(\cos(\theta)) + \sin^2(\theta) \cdot T_n''(\cos(\theta)) \\ &= -\cos(\theta) \cdot T_n'(\cos(\theta)) + (1 - \cos^2(\theta)) \cdot T_n''(\cos(\theta)) \\ &= \big(- XT_n' + (1 - X^2)T_n''\big) \circ \cos(\theta) \end{aligned}$$

Mais on a aussi $f_n(\theta) = \cos(n\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad f_n''(\theta) = -n^2 \cos(n\theta) = -n^2 T_n(\cos(\theta)).$$

Nous en déduisons que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \big(- XT_n' + (1 - X^2)T_n'' + n^2 T_n\big) \circ \cos(\theta) = 0.$$

Le polynôme $-XT_n' + (1 - X^2)T_n'' + n^2 T_n$ admet donc une infinité de racines sur $\mathbb{R}$ (tous les réels de $[-1, 1]$, puisque $\cos$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$). Il s'agit donc du polynôme nul. Ainsi $\boxed{(1 - X^2)T_n'' - XT_n' + n^2 T_n = 0}$.

b) Nous en déduisons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 - 1^2)T_n''(1) - T_n'(1) + n^2 T_n(1) = 0$ donc $T_n'(1) = n^2 T_n(1)$ et donc $\boxed{T_n'(1) = n^2}$.

Partie B : Factorisation des polynômes de Tchebychev

1)
- On a $T_2 = 2X^2 - 1 = 2\left(X^2 - \dfrac{1}{2}\right) = 2\left(X^2 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)$ donc $\boxed{T_2 = 2\left(X - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}$.
- On a $T_3 = 4X^3 - 3X = 4X\left(X^2 - \dfrac{3}{4}\right)$ donc $\boxed{T_3 = 4X\left(X - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}$.
- On a $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$. Un complexe z est une racine de T_4 si et seulement si z^2 est une racine de $P = 8X^2 - 8X + 1$. Ce trinôme admet $(-8)^2 - 4 \times 8 = 32$ pour discriminant si bien qu'il admet deux racines réelles : $\dfrac{8 + \sqrt{32}}{16} = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{4}$ et $\dfrac{8 - \sqrt{32}}{16} = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{4}$. Nous en déduisons que z est une racine de T_4 si et seulement si $z \in \left\{-\dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}, \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}\right\}$.

  Ainsi $\boxed{T_4 = 8\left(X - \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}\right)\left(X + \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}\right)\left(X - \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}\right)\left(X + \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}\right)}$.

- $T_5 = 16X^5 - 20X^3 + 5X = X(16X^4 - 20X^2 + 5)$. Un complexe non nul z est une racine de T_5 si et seulement si z^2 est une racine de $P = 16X^2 - 20X + 5$. Ce trinôme admet $(-20)^2 - 4 \times 5 \times 16 = 20(20-16) = 80$ pour discriminant si bien qu'il admet deux racines réelles : $\dfrac{20+\sqrt{80}}{32} = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$ et $\dfrac{20-\sqrt{80}}{32} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$. Nous en déduisons que z est une racine de T_5 si et seulement si $z \in \left\{-\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, -\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right\}$. Ainsi
$$\boxed{T_5 = 16X\left(X - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)\left(X + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)\left(X - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)\left(X + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)}.$$

2) Soit $x \in [-1,1]$. Il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $x = \cos(\theta)$. On a
$$\begin{aligned} T_n(x) = 0 \iff T_n(\cos(\theta)) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0 &\iff n\theta \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \end{aligned}$$
Par périodicité de $\cos$, nous en déduisons que x est racine de T_n si et seulement s'il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $\boxed{x = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)}$.

3) Soit $(j,k) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $j < k$. On a
$$0 < \frac{(2j-1)\pi}{2n} < \frac{(2k-1)\pi}{2n} < \frac{(2n-1)\pi}{2n} < \pi.$$
Puisque $\cos$ est strictement décroissante sur $]0,\pi[$, nous en déduisons que
$$\cos(0) > \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2n}\right) > \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) > \cos(\pi),$$
c'est-à-dire $1 > x_j > x_k > -1$. Nous en déduisons que $\boxed{\text{les racines } x_1, \ldots, x_n \text{ sont disjointes.}}$

4) Le polynôme T_n admet n racines réelles distinctes : $x_1, \ldots, x_n$. Puisqu'il est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}, nous en déduisons que
$$\boxed{T_n = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right).}$$

Pour finir (rassurez-vous ce n'était pas demandé) voici les courbes représentatives de T_n sur $[-1, 1]$ pour $n \in [\![1, 6]\!]$: