Devoir maison n° 10

À rendre le samedi 21 janvier 2019

Il possible et même encouragé de travailler en groupes de 2 ou 3 élèves et de me rendre une copie par groupe. Chaque élève du groupe devra avoir rédigé une partie du sujet.

Exercice 1 : Application des intégrales de Wallis au calcul de $\zeta(2)$

Extrait du DS n° 5 de l'an passé.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. L'objectif de cet exercice est de calculer la limite de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$.

Partie A : Convergence de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$

1) Étudier les variations de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$.
2) Pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, montrer que $\displaystyle\frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}$.
3) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $S_n \leqslant 1 + \displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t^2}$.
4) En déduire que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel de $]1,2]$. On note $\zeta(2)$ sa limite.

Partie B : Calcul de $\zeta(2)$ avec les intégrales de Wallis

L'objectif de cette partie est de montrer que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ à l'aide des intégrales de Wallis.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$I_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^n(t)\, dt \qquad \text{et} \qquad A_n = \frac{\pi}{2}\frac{I_{2n}}{W_{2n}}$$

1) Calculer W_0, I_0 et A_0.
2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que

$$W_{2n} = 2n \int_0^{\pi/2} t \sin(t) \cos^{2n-1}(t)\, dt,$$

puis que $W_{2n} = n(2n-1)I_{2n-2} - 2n^2 I_{2n}$.

b) *On rappelle que l'on a montré, dans le DM n° 9, que* $W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}W_{n-1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad A_{n-1} - A_n = \dfrac{\pi}{4n^2}$.

c) Conclure (sans utiliser de récurrence) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad I_0 - A_n = \dfrac{\pi}{4} S_n$.

3) a) Montrer que, pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\quad \sin(t) \geqslant \dfrac{2t}{\pi}$.

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{2n} \leqslant \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} t \left(1 - \frac{4t^2}{\pi^2}\right)^n dt.$$

4) En s'aidant du changement de variable $x = 1 - \dfrac{4t^2}{\pi^2}$ (dont on admettra la validité), montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{2n} \leqslant \frac{\pi^3}{16(n+1)}.$$

5) A l'aide d'un encadrement, montrer que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. *On rappelle que* $\sqrt{n}\, W_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

6) Conclure que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Exercice 2 : Factorisation de polynômes

1) Factoriser le polynôme $X^{12} - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
2) Factoriser le polynôme $P = X^5 - 3X^4 + 10X^3 + 9X^2 + 13X$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
   Indice : on pourra vérifier que $j = e^{2i\pi/3}$ est une racine de P et en déduire une autre racine complexe.

Exercice 3 : Polynômes de Tchebychev

Nous avons vu en cours que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. Il s'agit du polynôme

$$T_n = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p\, X^{n-2p}\, (1 - X^2)^p$$

L'objectif de ce problème est d'étudier des propriétés des polynômes T_n, $n \in \mathbb{N}$, sans utiliser une seule fois la formule ci-dessus.

Partie A : Premières propriétés des polynômes de Tchebychev

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

1) a) Montrer que $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.
   b) Déterminer T_2, T_3, T_4 et T_5 à l'aide de la formule de récurrence.
2) Déterminer le degré de T_n et son coefficient dominant a_n.
   On utilisera une récurrence double à partir de la formule de la question 1a.
3) Déterminer la parité de T_n en fonction de n.
4) Calculer $T_n(-1)$, $T_n(0)$ et $T_n(1)$.
5) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $T_n(T_p(\cos(\theta))) = T_p(T_n(\cos(\theta)))$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. En déduire que $T_p \circ T_n = T_n \circ T_p$.
6) a) Montrer que $(1 - X^2)T_n'' - XT_n' + n^2 T_n = 0$.
   b) En déduire $T_n'(1)$.

Partie B : Factorisation des polynômes de Tchebychev

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Factoriser les polynômes T_2, T_3, T_4 et T_5.
   On se ramènera à des trinômes du second degré.
2) Montrer que $x \in \mathbb{R}$ est une racine de T_n si et seulement s'il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $x = \cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$.
3) Montrer que ces n racines sont toutes distinctes. Notons les $x_1, \ldots, x_n$ respectivement.
   On pourra montrer que $x_n < \cdots < x_2 < x_1$.
4) En déduire une factorisation de T_n dans $\mathbb{R}[X]$.

CHEBYSHEV POLYNOMIALS WILL RETURN