Devoir maison n° 1

À rendre le lundi 17 septembre 2018

Exercice 1 : Questions en vrac

1) Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois propositions. Montrer que $(\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}))$ et $((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C})$ sont deux propositions équivalentes.

2) Écrire la négation de la phrase suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \left(x < y < x + \delta \quad \Longrightarrow \quad \ln\left(\frac{y}{x}\right) \leqslant \varepsilon \right).$$

3) a) Résoudre l'inéquation $1 - x + \sqrt{x+1} > 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

b) En déduire le domaine de définition de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(1 - x + \sqrt{x+1})}$.

4) Résoudre l'inéquation $x^6 + \dfrac{36}{x^2} > 13x^2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} 2^{\min(i,j)}$.

On pourra découper la somme selon que $i < j$, $j < i$ ou $i = j$.

Exercice 2

Donnons-nous n un entier naturel et considérons la fonction $f_n : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.

1) a) Justifier que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter $f_n'(x)$ pour tout réel x.

b) Donner (sans démonstration) une autre expression de $f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \qquad \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n}{(1-x)^2}.$$

2) Montrer à nouveau la formule précédente en utilisant un raisonnement par récurrence cette fois.

3) En déduire une expression de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k$ pour tout réel x.

Tournez SVP

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 4n + 2$.

1) a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$, $u_n \in \mathbb{N}^*$.

   c) En déduire les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $v_n = \dfrac{u_n + 1}{3^{n-1}}$.

   a) Calculer $v_{n+1} - v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 4\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $w_n = u_n + 2n + 2$.

   a) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

   b) En déduire une expression de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Déduire des questions précédentes que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}.$$

5) Comparer la formule ci-dessus avec celle obtenue dans l'exercice précédent (pour un réel x bien choisi).

Exercice 4 : Factorisations de $x^n - y^n$ et $x^n + y^n$

Soient x et y des nombres complexes.

1) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k.$$

2) En déduire que, pour tout entier naturel n impair,

$$x^n + y^n = (x + y) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{n-1-k} y^k.$$

3) Écrire ces formules dans les cas particuliers où $n = 2$, 3 et 4 sans utiliser le symbole $\sum$.