Corrigé du concours blanc de Mathématiques du premier semestre

Exercice 1 : D'après Ecricome ECE 2017

1) On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ toute application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et, pour tous événements A et B incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

2) On considère $\boxed{\Omega = [\![1, n]\!]^n}$. Pour tout $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$ et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, ω_k représente le numéro obtenu lors du $k^{\text{ième}}$ tirage. On munit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de $\boxed{\mathbb{P} \text{ l'équiprobabilité sur } \Omega}$. On a $\boxed{\text{card}(\Omega) = n^n.}$

3) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, U_k compte le nombre de succès (obtenir 1, de probabilité $\frac{1}{n}$) lors de la répétition de k épreuve de Bernoulli. Puisque les tirages sont effectués avec remise, on peut considérer que ces k épreuves de Bernoulli sont indépendantes. Il s'ensuit que $\boxed{U_k \hookrightarrow \mathcal{B}(k, 1/n).}$ On a donc $\boxed{\mathbb{E}(U_k) = \frac{k}{n} \text{ et } \mathbb{V}(U_k) = \frac{k}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{k(n-1)}{n^2}.}$

4) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on tire uniformément une boule parmi n boules numérotées de 1 à n. Puisque X_k compte le numéro de la boule tirée, on a $\boxed{X_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!]).}$

On a donc $\boxed{\mathbb{E}(X_k) = \frac{n+1}{2} \text{ et } \mathbb{V}(X_k) = \frac{n^2-1}{12}.}$

5) a) Au minimum on atteint ou dépasse n en n étapes (si on ne tire que la boule numérotée 1 aux $n-1$ premiers tirages). Au maximum on atteint n au premier tirage (si on tire la boule numérotée n dès le premier tirage). Enfin T_n peut prendre toutes les valeurs intermédiaires (pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$, $[T_n = k]$ est réalisé si, par exemple, on tire la boule 1 aux $k-1$ premiers tirages puis la boule $n-k$ au $k^{\text{ième}}$ tirage). Ainsi $\boxed{T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]}$.

b) On a $[T_n = 1] = [X_1 = n]$ donc $\boxed{\mathbb{P}(T_n = 1) = \mathbb{P}(X_1 = n) = \frac{1}{n}.}$

c) L'événement $[T_n = n]$ est réalisé si et seulement si atteint ou dépasse n au dernier tirage si et seulement si on a obtenu seulement la boule numérotées 1 aux $n-1$ premiers tirages.

Méthode 1. On en déduit que $[T_n = 1] = \bigcap_{k=1}^{n-1} [X_k = 1]$ et donc, par indépendance des lancers, on obtient

$$\boxed{\mathbb{P}(T_n = 1) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_k = 1) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.}$$

Méthode 2. On en déduit que $[T_n = 1] = [U_{n-1} = n-1]$ et donc

$$\boxed{\mathbb{P}(T_n = n) = \mathbb{P}(U_{n-1} = n-1) = \binom{n-1}{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^0 = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.}$$

Méthode 3. On remarque que $[T_n = 1] = \{(1, \dots, 1, 1), (1, \dots, 1, 2), \dots, (1, \dots, 1, n)\}$ donc

$$\boxed{\mathbb{P}(T_n = n) = \frac{\text{card}([T_n = n])}{\text{card}(\Omega)} = \frac{n}{n^n} = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.}$$

6) a) On a $\boxed{\mathbb{P}(T_2=1)=\frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}(T_2=2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}=\frac{1}{2}.}$

b) On a $\mathbb{P}(T_3=1)=\frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(T_3=3)=\left(\frac{1}{3}\right)^{3-1}=\frac{1}{9}$. Ainsi

$$\mathbb{P}(T_3=2)=1-\mathbb{P}(T_3=1)-\mathbb{P}(T_3=3)=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}.$$

Résumons : $\boxed{\mathbb{P}(T_3=1)=\frac{1}{3},\ \mathbb{P}(T_3=1)=\frac{5}{9},\ \mathbb{P}(T_3=1)=\frac{1}{9}.}$

Ensuite

$$\mathbb{E}(T_3)=\sum_{k=1}^{3}k\mathbb{P}(T_3=k)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{5}{9}+\times 3\times\frac{1}{9}=\boxed{\frac{16}{9}}.$$

La formule de transfert entraîne que

$$\mathbb{E}(T_3^2)=\sum_{k=1}^{3}k^2\mathbb{P}(T_3=k)=1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{5}{9}+\times 3^2\times\frac{1}{9}=\frac{32}{9}$$

et, d'après la formule de König-Huygens, $\mathbb{V}(T_3)=\mathbb{E}(T_3^2)-\mathbb{E}(T_3)^2=\frac{32}{9}-\frac{16^2}{9^2}=\boxed{\frac{32}{81}}$.

7) a) Au minimum $S_k=k$ (si on ne tire que la boule numérotée 1 lors des k premiers tirages). Au maximum $S_k=kn$ (si on ne tire que la boule numérotée n lors des k premiers tirages). Enfin S_k peut prendre toutes les valeurs intermédiaires (cela peut se montrer par récurrence... on l'admet). Ainsi $\boxed{S_k(\Omega)=[\![k,kn]\!]}$.

b) Fixons $k\in[\![1,n-1]\!]$. On a $\boxed{S_{k+1}=S_k+X_{k+1}.}$

c) Soient $i\in[\![k+1,n]\!]$ et $j\in S_k(\Omega)$. On a

$$\mathbb{P}_{[S_k=j]}(S_{k+1}=i)=\mathbb{P}_{[S_k=j]}(X_{k+1}=i-j)=\mathbb{P}(X_{k+1}=i-j),$$

puisque les événements $[X_{k+1}=i-j]$ et $[S_k=j]$ sont indépendants. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[S_k=j]}(S_{k+1}=i)&=\begin{cases}\frac{1}{n} & \text{si}\quad 1\leqslant i-j\leqslant n\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\\ &=\begin{cases}\frac{1}{n} & \text{si}\quad i-n\leqslant j\leqslant i-1\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned}$$

Puisque $i-n\leqslant 0<k$ et $i-1\leqslant n-1<n\leqslant kn$, on en déduit que

$$\boxed{\mathbb{P}_{[S_k=j]}(S_{k+1}=i)=\begin{cases}\frac{1}{n} & \text{si}\quad k\leqslant j\leqslant i-1\\ 0 & \text{si}\quad i\leqslant j\leqslant kn\end{cases}}$$

d) Soit $i\in[\![k+1,n]\!]$. La formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements associé à S_k, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{k+1}=i)&=\sum_{j=k}^{kn}\mathbb{P}_{[S_k=j]}(S_{k+1}=i)\mathbb{P}(S_k=j)\\ &=\sum_{j=k}^{i-1}\mathbb{P}_{[S_k=j]}(S_{k+1}=i)\mathbb{P}(S_k=j)+\sum_{j=i}^{kn}\mathbb{P}_{[S_k=j]}(S_{k+1}=i)\mathbb{P}(S_k=j)\\ &=\sum_{j=k}^{i-1}\frac{1}{n}\times\mathbb{P}(S_k=j)+\sum_{j=k}^{i-1}0\times\mathbb{P}(S_k=j)\end{aligned}$$

et donc $\boxed{\mathbb{P}(S_{k+1}=i)=\frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1}\mathbb{P}(S_k=j).}$

8) a) Soient a et b des entiers naturels tels que $a \leqslant b$. La formule du triangle de Pascal entraîne que

$$\sum_{j=a}^{b}\binom{j-1}{a-1}=\sum_{j=a}^{b}\left(\binom{j}{a}-\binom{j-1}{a}\right)$$

On reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{j=a}^{b}\binom{j-1}{a-1}=\binom{b}{a}-\binom{a-1}{a}=\binom{b}{a}-0=\binom{b}{a}.$$

b) *Initialisation.* Soit $i \in [\![1,n]\!]$. On a $\mathbb{P}(S_1=i)=\mathbb{P}(X_1=i)=\frac{1}{n}=\frac{1}{n^1}\binom{i-1}{1-1}$. Ainsi $H(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$. Supposons que $H(k)$ est vraie. Montrons que $H(k+1)$ est vraie. Donnons-nous $i \in [\![k+1,n]\!]$. Pour tout $j \in [\![k,i-1]\!]$, on a $j \in [\![k,n]\!]$ donc l'hypothèse de récurrence entraîne que $P(S_k=j)=\frac{1}{n^k}\binom{j-1}{k-1}$. Il s'ensuit que

$$\mathbb{P}(S_{k+1}=i)=\frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1}\mathbb{P}(S_k=j)=\frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1}\frac{1}{n^k}\binom{j-1}{k-1}=\frac{1}{n^{k+1}}\sum_{j=k}^{i-1}\binom{j-1}{k-1}=\frac{1}{n^{k+1}}\binom{i-1}{k},$$

d'après la question précédente. Ainsi $\mathbb{P}(S_{k+1}=i)=\frac{1}{n^{k+1}}\binom{i-1}{(k+1)-1}$. Nous en déduisons que $H(k+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![1,n]\!],\ H(k) \text{ est vraie.}}$

9) a) Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$. L'événement $[T_n > k]$ est réalisé si et seulement si il a fallu strictement plus de k tirages pour que la somme des numéros atteigne ou dépasse n si et seulement si à l'issue des k premiers tirages la somme est strictement inférieure à n, c'est-à-dire si et seulement si $[S_k \leqslant n-1]$ est réalisé. Ainsi $\boxed{[T_n>k]=[S_k\leqslant n-1].}$

b) Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$. Il s'ensuit que

$$\mathbb{P}(T_n>k)=\mathbb{P}(S_k\leqslant n-1)=\sum_{i=k}^{n-1}\mathbb{P}(S_i=j)=\sum_{i=k}^{n-1}\frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k}=\frac{1}{n^k}\sum_{i=k}^{n-1}\binom{i-1}{(k+1)-1}.$$

La question 8a entraîne alors que

$$\boxed{\mathbb{P}(T_n>k)=\frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}.}$$

c) Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $n > k$, alors

$$\frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}=\frac{1}{n^k}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}=\frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\dots(n-k)}{n^k}=\frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{j}{n}\right)$$

et donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(T_n>k)=\frac{1}{k!}.}$

d) Si $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}(T_n=k)=\mathbb{P}(T_n>k-1)-\mathbb{P}(T_n>k)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}=\frac{k}{k!}-\frac{1}{k!}.$$

Ainsi $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(T_n=k)=\frac{k-1}{k!}.}$

10) a) On a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(T_n > k) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=k+1}^{n} \mathbb{P}(T_n = j) \right) = \sum_{0 \leqslant k < j \leqslant n} \mathbb{P}(T_n = j).$$

D'après le théorème de Fubini,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(T_n > k) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{j-1} \mathbb{P}(T_n = j) \right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(T_n = j) \left(\sum_{k=0}^{j-1} 1 \right) = \sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}(T_n = j) = \mathbb{E}(T_n).$$

On a donc

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-1-k} = \boxed{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}},$$

d'après la formule du binôme de Newton.

b) On a $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$ donc $n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc, puisque la fonction exponentielle est continue en 1, on a $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^1$. Finalement

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e.}$$

Exercice 2 : Fonctions (presque) (exactement) (doublement) surjectives

1) $\boxed{\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y.}$

2) $\boxed{\forall y \in F, \exists (x_1, x_2) \in E^2, x_1 \neq x_2, f(x_1) = f(x_2) = y.}$

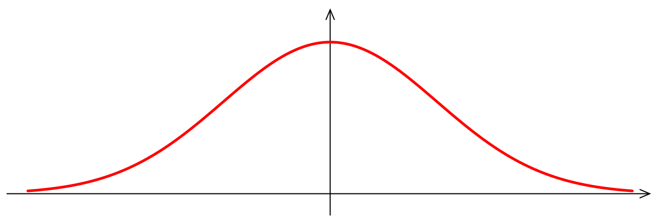
3) Si $y > 0$ alors y a deux antécédents par la fonction carré : $\sqrt{y}$ et $-\sqrt{y}$. Ainsi, tout élément de $\mathbb{R}_+^*$ sauf 0 admet au moins deux antécédents. Ainsi $\boxed{\text{la fonction carré est doublement surjective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}_+.}$

4) Supposons que f est continue presque surjective de $\mathbb{R}$ dans $]0, 1[$ et non surjective. Ainsi, tous les éléments de $]0, 1[$ admettent un antécédent, sauf un qu'on note y. Puisque $y \in]0, 1[$, on a $0 < y < 1$ et donc il existe $y_1 \in]0, y[$ et $y_2 \in]y, 1[$. Par hypothèse, y_1 et y_2 admettent un antécédent par f, qu'on note respectivement x_1 et x_2. On a donc $f(x_1) < y < f(x_2)$. La fonction f étant continue, d'après le TVI, il existe $x \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x) = y$, c'est-à-dire que y admet un antécédent par f : c'est absurde.

Ainsi $\boxed{\text{une application } f : \mathbb{R} \longrightarrow]0, 1[\text{ continue presque surjective est surjective.}}$

5) La fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-x^2}$ convient. Même s'il n'était pas demandé de le démontrer, démontrons-le. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2xe^{-x^2}$. On en déduit le tableau de variations et le graphe de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



Montrons donc que f est presque surjective non surjective de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$. Elle n'est évidemment par surjective car 0 n'a aucun antécédent par f (inutile de justifier davantage, une exponentielle n'est jamais nulle). Soit $y \in]0, 1]$. Puisque $f(0) = 1$ et $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et f étant continue, d'après le TVI, y admet un antécédent par f sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $\mathbb{R}$. Tout élément de $[0, 1]$ sauf un admet donc un antécédent par f donc $\boxed{\text{la fonction } x \mapsto e^{-x^2} \text{ est presque surjective non surjective de } \mathbb{R} \text{ dans } [0, 1].}$

6) Soit $z \in \mathbb{U}$. D'après le cours, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $e^{i\theta} = z$. De plus, on a également $e^{i(\theta+2\pi)} = z$ et $e^{i(\theta+4\pi)} = z$ et donc z a au moins trois antécédents par cette fonction.

$\boxed{\text{La fonction } \theta \mapsto e^{i\theta} \text{ est doublement surjective mais pas exactement doublement surjective.}}$

7) La fonction f atteint un minimum (si $a > 0$) ou un maximum (si $a < 0$) en $-\dfrac{b}{2a}$. En d'autres termes, f est minorée ou majorée : il existe donc une infinité de réels n'ayant aucun antécédent par f.

$\boxed{\text{La fonction } f : x \mapsto ax^2 + bx + c \text{ n'est pas presque surjective, et donc pas presque doublement surjective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.}$

8) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $az^2 + bz + c = y$ si et seulement si $az^2 + bz + (c - y) = 0$. Ainsi, le nombre de solutions de l'équation de l'énoncé est le nombre de solution de l'équation $az^2 + bz + (c - y) = 0$. Or, sur $\mathbb{C}$, il n'y a que deux cas : si le discriminant Δ est non nul, il y a deux solutions simples distinctes, et si le discriminant est nul, il y a une solution double. Or, $\Delta = b^2 - 4a(c - y)$ et $\Delta = 0$ si et seulement si $y = c - \dfrac{b^2}{4a}$ (on a bien $a \neq 0$). En d'autres termes, $c - \dfrac{b^2}{4a}$ admet un seul antécédent par f et tout autre complexe en admet deux.

$\boxed{f \text{ est presque doublement surjective, seul } y = c - \dfrac{b^2}{4a} \text{ admet un seul antécédent par } f.}$

Exercice 3 : Étude d'une suite récurrente

1) La fonction $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus $\dfrac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ et $e^{-u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f(x) = e^{-1/x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Ainsi

$\boxed{f \text{ est prolongeable en une fonction continue sur } \mathbb{R} \text{ tout entier en posant } f(0) = 0.}$

2) a) La fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\boxed{f'(x) = -(-2)x^{-2-1}e^{-x^{-2}} = \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}.}$$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{x}e^{-1/x^2} = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{1/2} e^{-1/x^2} & \text{si} \quad x > 0 \\ -\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{1/2} e^{-1/x^2} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

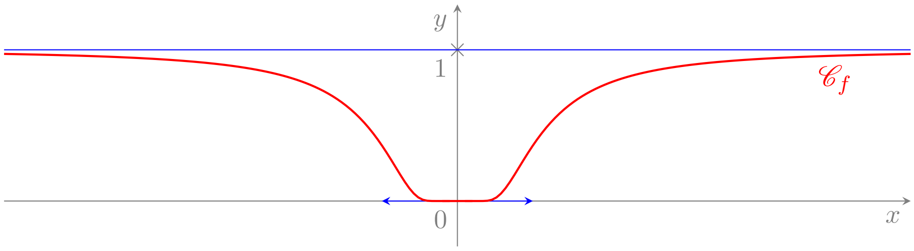
Or $\dfrac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ et, par croissances comparées, $u^{1/2}e^{-u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et donc $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ avec } f'(0) = 0.}$

c) Déjà f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$. Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|f'(x)| = 2\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{3/2} e^{-1/x^2}$. Or $\dfrac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ et, par croissances comparées, $u^{3/2}e^{-u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 = f'(0)$. Cela signifie que f' est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ainsi $\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $xf'(x) > 0$ donc f' est strictement croissante (resp. décroissante) sur $\mathbb{R}_+*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$). De plus $-1/x^2 \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\exp$ est continue en 0 donc $f(x) = e^{-1/x^2} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

et l'allure de la courbe :



3) La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc le théorème de la bijection entraîne que tout réel de $]0,1[\, = f(\mathbb{R}_+^*)$ admet un unique antécédent par f sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ donc le théorème de la bijection entraîne que tout réel de $]0,1[\, = f(\mathbb{R}_-^*)$ admet un unique antécédent par f sur $\mathbb{R}_-^*$. Ainsi tout réel de $]0,1[$ admet exactement deux antécédent. Enfin $f(0) = 0$ et $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ si bien que seul 0 n'admet qu'un seul antécédent. Ainsi $\boxed{f \text{ est presque doublement surjective de } \mathbb{R} \text{ dans } [0,1[.}$

Il y a avait une petite erreur d'énoncé ici : f est presque doublement surjective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) = [0,1[$ et non $[0,1]$.

4) a) La fonction f' est dérivable sur $]0,1]$ et, pour tout $x \in\,]0,1]$,

$$f''(x) = 2(-3)x^{-3-1}e^{-1/x^2} + \frac{2}{x^3}(-1)(-2)x^{-2-1}e^{-1/x^2} = \frac{2(2-3x^2)}{x^6}e^{-1/x^2}.$$

Ainsi $f''(x)$ a le signe de $2-3x^2$ sur $]0,1]$, c'est-à-dire $f''(x) > 0$ si et seulement si $x \in\,]0, \sqrt{2/3}[$. D'où le tableau de variations :

x	0		$\sqrt{2/3}$		1
$f''(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
f'	0	$\nearrow$	$f'(\sqrt{2/3})$	$\searrow$	$2/e$

b) Posons $\boxed{M = f'(\sqrt{2/3}) \in\,]0,1[.}$ L'étude précédente entraîne que f est dérivable sur $[0,1]$ et que f' est bornée sur $[0,1]$ par M. L'inégalité des accroissements finis entraîne alors que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|.$$

En particulier

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |u_{n+1}| = |f(u_n) - f(0)| \leqslant M\,|u_n - 0|.}$$

5) Une récurrence immédiate montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |u_n| \leqslant M^{n-1}|u_1|.$$

Puisque $|M| < 1$, on a $M^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc, par encadrement, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$

6) a)

```
function y=f(x)
    if     x==0    then
           y=0
    else
           y=exp(-1/(x∧2))
    end
endfunction
```

b)

```
u0=input('Entrez le terme initial:');
eps=input('Entrez un réel non nul :');
u=u0; n=0;
while  abs(u)>eps
       u=exp(-1/(u∧2)); n=n+1;
end
disp('n='+string(n)+' est le premier rang pour lequel |u_n|<='+string(eps)+'.')
```

Exercice 4 : Injectivité et stricte monotonie

1) Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x \neq y$. On a alors $x < y$ ou bien $x > y$. Si f est strictement croissante (resp. décroissante), nous obtenons $f(x) < f(y)$ ou $f(x) > f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$ ou $f(x) < f(y)$). Dans tous les cas $f(x) \neq f(y)$. Ainsi $\boxed{f \text{ est injective sur } I.}$

2) a) Puisque f n'est pas strictement croissante, la phrase

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad \big(x < y \quad \Longrightarrow \quad f(y) - f(x) > 0\big)$$

est fausse et donc $\boxed{\text{il existe } (x, y) \in I^2 \text{ tel que } x < y \text{ et } f(y) - f(x) \leqslant 0.}$

b) Soient $(u, v) \in I^2$ et $t \in [0, 1]$.

- Si $u < v$, alors $0 \leqslant t(v - u) \leqslant v - u$ et donc $u \leqslant u + t(v - u) \leqslant u + (v - u) = v$.
- Si $u \geqslant v$, alors $v - u \leqslant t(v - u) \leqslant 0$ et donc $v \leqslant u + t(v - u) \leqslant u$.

Ainsi $\boxed{u + t(v - u) \text{ est compris entre } u \text{ et } v.}$

c) Puisque I est un intervalle contenant a, b, x et y, il s'ensuit que, pour tout $t \in [0, 1]$, $a + t(x - a)$, $b + t(b - y) \in I$. Ainsi φ est définie et sur $[0, 1]$. Puisque $t \longmapsto a + t(x - a)$ et $t \longmapsto b + t(b - y)$ sont continues sur $[0, 1]$ et f est continue sur I, la fonction φ est <u>continue</u> sur $[0, 1]$. De plus

$$\varphi(0) = f(b) - f(a) > 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(1) = f(y) - f(x) \leqslant 0.$$

Ainsi $0 \in [\varphi(1), \varphi(0)]$ et le TVI entraîne que $\boxed{\text{il existe } c \in [0, 1] \text{ tel que } \varphi(c) = 0.}$

d) On a donc $f(b + c(y - b)) = f(a + c(x - a))$ et, comme f est injective, nous en déduisons que $b + c(y - b) = a + c(x - a)$ et donc $\boxed{(1 - c)(b - a) = -c(y - x)}$. $\boxed{\text{C'est absurde}}$ car $(1 - c)(b - a) \geqslant 0$, $-c(y - x) \leqslant 0$ et ils ne peuvent pas être tous les deux nuls.

3) Par exemple $f : x \in [0, 1] \longmapsto \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0, 1/2[\\ \dfrac{3}{2} - x & \text{si} \quad x \in [1/2, 1]. \end{cases}$ est injective mais pas strictement monotone sur $[0, 1]$.