Concours blanc de Mathématiques du premier semestre

mercredi 9 janvier 2019

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

***Encadrez ou soulignez les résultats principaux**. Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié (notamment vous devez citer le nom des théorèmes que vous employez). Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.*

Exercice 1 : D'après Ecricome ECE 2017

Soit n un entier naturel non nul. On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise jusqu'à ce que la somme cumulée des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

A chaque tirage cette somme cumulée augmente de 1 au minimum si bien que, dans le pire des cas, elle dépassera ou atteindra n au $n^{\text{ième}}$ tirage. Pour simplifier l'étude, on suppose donc que l'on effectue exactement n tirages successifs avec remise dans cette urne et que l'on s'intéresse au nombre de tirages nécessaires pour que la somme des numéros des boules obtenues soit supérieur ou égale à n.

1) **Question de cours.** Rappeler la définition d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur un espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
2) Déterminer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ associé à cette expérience. Préciser le cardinal de Ω.
3) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Notons U_k la variable aléatoire comptant le nombre de boules numérotées 1 obtenues lors des k premiers tirages. Déterminer la loi de U_k et donner (sans calculs) son espérance et sa variance.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au $i^{\text{ième}}$ tirage.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i$ la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages.

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieur ou égale à n.

Voici un exemple dans le cas où $n = 10$: si les numéros obtenus sont, dans cet ordre, $2, 1, 5, 1, 8, 4, 3, 1, 7, 3$, *alors*

$$S_1 = 2, \quad S_2 = 3, \quad S_3 = 8, \quad S_4 = 9, \quad S_5 = 17, \quad S_6 = 21, \quad S_7 = 24, \quad S_8 = 25, \quad S_9 = 32, \quad S_{10} = 35$$

et donc $T_{10} = 5$ (puisque $S_4 < 10$ et $S_5 \geqslant 10$).

4) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, déterminer la loi de X_k et donner (sans calculs) son espérance et sa variance.
5) a) Déterminer $T_n(\Omega)$.
   b) Calculer $\mathbb{P}(T_n = 1)$.
   c) Montrer que $\mathbb{P}(T_n = n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$.
6) **Quelques cas particuliers.**
   a) Dans cette question seulement, on suppose que $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.
   b) Dans cette question seulement, on suppose que $n = 3$. Déterminer la loi de T_3 et calculer son espérance et sa variance.
7) a) Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
   b) Fixons $k \in [\![1, n-1]\!]$. Écrire S_{k+1} en fonction de S_k et X_{k+1}.
   c) Soient $i \in [\![k+1, n]\!]$ et $j \in S_k(\Omega)$. Déterminer alors $\mathbb{P}_{[S_k=j]}(S_{k+1} = i)$.
   On séparera les cas où $j \leqslant i - 1$ et $j \geqslant i$.

d) En déduire que

$$\forall i \in [\![k+1, n]\!], \qquad \mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j).$$

8) a) A l'aide de la formule du triangle de Pascal et d'une somme télescopique [1], montrer que pour tous entiers naturels a et b tels que $a \leqslant b$,

$$\sum_{j=a}^{b} \binom{j-1}{a-1} = \binom{b}{a}.$$

b) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, notons $H(k)$ la propriété :

$$\text{« } \quad \forall i \in [\![k, n]\!], \qquad \mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} \quad \text{ »} .$$

Montrer par récurrence que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la propriété $H(k)$ est vraie.

9) a) Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $[T_n > k] = [S_k \leqslant n-1]$.

b) En déduire que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathbb{P}(T_n > k) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n-1}{k}$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(T_n > k) = \dfrac{1}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

d) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(T_n = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

10) a) Montrer que $\mathbb{E}(T_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(T_n > k)$ puis que $\mathbb{E}(T_n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$.

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

Exercice 2 : Fonctions (presque) (exactement) (doublement) surjectives

Pour tous ensembles non vides E et F et toute application $f : E \longrightarrow F$, on dit que f est

- presque surjective (de E dans F) si tout élément de F (sauf peut-être un) admet un antécédent par f dans E.
- doublement surjective (de E dans F) si tout élément de F admet au moins deux antécédents par f dans E.
- exactement doublement surjective (de E dans F) si tout élément de F admet exactement deux antécédents par f dans E.
- presque doublement surjective (de E dans F) si tout élément de F (sauf peut-être un) admet au moins deux antécédents par f dans E.

Les questions de cette partie sont indépendantes.

1) Rappeler la définition (avec des quantificateurs) d'une application $f : E \longrightarrow F$ surjective.
2) Écrire avec des quantificateurs la proposition « f est doublement surjective de E dans F ».
3) Montrer que la fonction carré est presque doublement surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$.
4) Montrer qu'une application $f : \mathbb{R} \longrightarrow]0, 1[$ continue presque surjective est surjective (de $\mathbb{R}$ dans $]0, 1[$).
5) Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ continue, presque surjective mais non surjective. Un dessin suffira (penser à une fonction « en cloche ») mais une expression explicite, sans démonstration, sera valorisée.
6) On rappelle (cf. cours) que la fonction $\theta \longmapsto e^{i\theta}$ est une surjection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Montrer qu'elle est doublement surjective. Est-elle exactement doublement surjective ?
7) Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b, c) \in \mathbb{R}^2$. La fonction $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ est-elle presque doublement surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? presque surjective ?
8) Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $(b, c) \in \mathbb{C}^2$. Soit $y \in \mathbb{C}$. Donner, selon la valeur de y, le nombre de solutions de l'équation (d'inconnue z) $az^2 + bz + c = y$. En déduire que la fonction $f : z \mapsto az^2 + bz + c$ est presque doublement surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On explicitera le seul complexe y n'admettant qu'un seul antécédent par f.

1. On rappelle que $\binom{n}{k} = 0$ lorsque k et n sont des entiers naturels tels que $k > n$.

Exercice 3 : Étude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-1/u_n^2} = f(u_n)$ avec

$$f : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto e^{-1/x^2}.$$

Puisque l'exponentielle d'un réel strictement négatif est comprise strictement entre 0 et 1, une récurrence immédiate (que l'on ne demande pas de faire) montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le terme u_n est bien défini et $u_n \in]0,1[$.

1) Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ce prolongement sera toujours noté f dans la suite.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
   b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.
   On n'utilisera pas le théorème de prolongement de la dérivée.
   c) Est-ce que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?
   d) Construire le tableau de variations de f et tracer l'allure de sa courbe représentative.
   On fera apparaître la tangente en 0 et les éventuelles asymptotes en $\pm\infty$.

3) Montrer que f est presque doublement surjective (cf. exercice 2) de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$.
On pourra s'aider du tableau de variations mais on attend une démonstration rigoureuse.

4) a) Étudier les variations de f' sur $[0,1]$.
   b) On admet que $f'(\sqrt{2/3}) < 1$. En déduire qu'il existe $M \in]0,1[$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |u_{n+1}| \leqslant M\,|u_n|.$$

5) Montrer finalement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

6) a) Écrire une fonction Scilab, appelée `f`, qui prend en entrée un réel x (possiblement nul) et qui renvoie la valeur de $f(x)$.
   b) Écrire un programme en Scilab qui demande à l'utilisateur $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ et qui renvoie le premier rang n tel que $|u_n| \leqslant \varepsilon$.
   Attention : on ne connaît pas la valeur de M.

Exercice 4 : Injectivité et stricte monotonie

Soit f une fonction définie sur un intervalle I non vide et non réduit à un point.

1) Montrer que, si f est strictement monotone sur I, alors f est injective sur I.

2) Étudions une réciproque partielle. Supposons que f est injective et continue sur I. Fixons $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$. Puisque f est injective sur I, on a $f(a) \neq f(b)$. Supposons que $f(a) < f(b)$. Raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas strictement croissante sur I.

   a) Justifier alors l'existence de $(x,y) \in I^2$ tel que $x < y$ et $f(y) - f(x) \leqslant 0$.
   b) Montrer brièvement que, pour tous $(u,v) \in I^2$ et $t \in [0,1]$, $u + t(v-u)$ est compris entre u et v.
   c) Considérons alors la fonction $\varphi : t \in [0,1] \longmapsto f(b + t(y-b)) - f(a + t(x-a))$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $\varphi(c) = 0$.
   d) En déduire que $(1-c)(b-a) = -c(y-x)$ et aboutir à une absurdité.

   Ainsi f est strictement croissante sur I. Si $f(a) > f(b)$, alors le raisonnement précédent (appliqué à $-f$) entraîne que f est strictement décroissante sur I. Cela montre qu'une fonction injective et continue sur I est strictement monotone sur I.

3) Donner un exemple de fonction (nécessairement discontinue) injective sur $[0,1]$ et qui n'est pas strictement monotone sur $[0,1]$. Un dessin suffira mais une expression explicite, sans démonstration, sera valorisée.