Chapitre 9

Probabilités sur un univers fini

I Espaces probabilisés finis

1) Introduction

La théorie des probabilités consiste en la modélisation des phénomènes dans lesquels intervient le hasard.

Définition. *Une expérience aléatoire est une expérience renouvelable dont le résultat ne peut être prévu à l'avance et qui, renouvelée dans des conditions identiques, ne donne pas forcément le même résultat à chaque fois.*

Voici quelques exemples d'expériences aléatoires simples : lancer de dé, lancer de pièce, tirage de boules dans une urne, tirage d'une carte dans un jeu de cartes, etc.

La théorie des probabilités est apparue historiquement pour étudier les jeux de hasard. Elle est désormais utilisée pour décrire des phénomènes trop complexes pour être analysés en détail (le hasard est donc une hypothèse simplificatrice). Par exemple : l'écoulement à travers un matériau poreux (percolation), le comportement des molécules dans un aimant (modèle d'Ising) ou dans un gaz, l'évolution d'une grande population de consommateur, l'évolution d'une espèce qui se reproduit, etc.

Mathématiquement, pour décrire une expérience de probabilité, on se donne :

- Un ensemble Ω, appelé univers, qui contient toutes les résultats possibles.
  Exemple :
- Un ensemble de phénomènes, appelés événements, qui peuvent se produire ou ne pas se produire lors de l'expérience. Un événement est décrit par une partie de Ω (généralement l'ensemble des résultats de l'expérience menant à la réalisation de ce phénomène).
- Une fonction qui à tout événement associe la probabilité d'occurrence de A.

Nous allons à présent définir les notions d'univers, d'événements et de probabilités proprement. Pour le moment nous limitons aux univers finis, c'est-à-dire aux expériences aléatoires n'ayant qu'un nombre fini de résultats possibles. Nous verrons le cas général au second semestre.

2) Espaces probabilisables finis

Définition. *On appelle espace probabilisable fini la donnée du couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ où Ω est un ensemble fini appelé univers (des possibles). C'est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.*

Les éléments de Ω sont appelées les éventualités ou les issues de l'expérience aléatoire.

Un élément $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est appelé événement. On dit que l'événement A est réalisé si le résultat de l'expérience est un élément de A.

Si $\omega \in \Omega$, le singleton $\{\omega\}$ est appelé événement élémentaire.

L'événement $\varnothing$ est l'événement impossible. L'événement Ω est l'événement certain.

Il se peut que l'ensemble Ω des résultats possibles d'une expérience aléatoire soit un ensemble infini.
Par exemple l'ensemble des résultats possibles de l'expérience consistant à compter le nombre de lancers de pièce nécessaires pour obtenir un Pile est $\mathbb{N}^*$.

Dans ce cas, nous verrons que certaines parties de Ω ne pourront pas être considérées comme des événements (il ne sera pas possible de définir correctement leur probabilité) et nous devrons préciser l'ensemble $\mathcal{A}$ des événements que l'on peut observer. Ainsi, en général, un espace probabilisable est la donnée d'un couple $(\Omega, \mathcal{A})$ où $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est appelé l'algèbre des événements. Nous verrons que l'ensemble $\mathcal{A}$ doit vérifier certaines propriétés qui en font une *tribu*. Dans ce chapitre, nous nous limitons au cas où Ω est fini : il sera alors toujours possible de prendre $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Le cas général sera traité au second semestre.

3) Opérations sur les événements

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini.

Proposition/Définition. *Soient A et B dans $\mathcal{P}(\Omega)$.*

- *L'événement $\boxed{}$ est réalisé si A ne l'est pas. On dit qu'il s'agit de l'événement contraire de A.*
- *La relation $\boxed{}$ signifie que la réalisation de l'événement A implique celle de l'événement B.*
- *L'événement $\boxed{}$ est réalisé si l'un au moins des événements A et B est réalisé.*
- *L'événement $\boxed{}$ est réalisé si les événements A et B sont tous les deux réalisés.*
- *L'événement $\boxed{}$ est réalisé si l'événement A est réalisé mais pas l'événement B.*
- *Si $\boxed{}$, les événements A et B sont dits incompatibles.*

Exemple : *On dispose d'un jeu de 52 cartes. On tire trois cartes successivement et avec remise. On peut travailler avec l'univers $\boxed{}$ où*

$$E = \{A\clubsuit, K\clubsuit, Q\clubsuit, J\clubsuit, 10\clubsuit, \dots, A\spadesuit, K\spadesuit, \dots, A\diamondsuit, K\diamondsuit, \dots, A\heartsuit, K\heartsuit, \dots, 3\heartsuit, 2\heartsuit\}.$$

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, notons A_i l'événement « obtenir $\spadesuit$ au $i^{\text{ième}}$ tirage ». L'événement

- *« obtenir un $\clubsuit$, $\diamondsuit$ ou $\heartsuit$ au premier tirage » est $\boxed{}$.*
- *« obtenir $\spadesuit$ aux deux premiers tirages mais pas au troisième » est $\boxed{}$.*
- *« obtenir $\spadesuit$ aux deux premiers tirages » est $\boxed{}$.*
- *« obtenir au moins un $\spadesuit$ » est $\boxed{}$.*
- *« ne pas obtenir de $\spadesuit$ » est $\boxed{}$.*
- *« obtenir exactement deux $\spadesuit$ » est $\boxed{}$.*

Notons B_1 l'événement « obtenir une carte de couleur noire au premier tirage ». Nous avons $A_1 \subset B_1$. En effet, si l'événement A_1 est réalisé, alors l'événement B_1 aussi.
Les événements « obtenir une paire » et « les trois cartes sont des $\heartsuit$ » sont incompatibles.

Rappelons les propriétés élémentaires des opérations ensemblistes : soient A, B et C des parties de Ω.

$$\begin{array}{ll}
A \cup B = B \cup A, & \Omega \cap A = A, \\
A \cap B = B \cap A, & \Omega \cup A = \Omega, \\
A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, & \varnothing \cup A = A, \\
A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, & \varnothing \cap A = \varnothing, \\
A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), & \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \\
A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), & \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}. \\
(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B), &
\end{array}$$

Ces notions se généralisent à des familles finies d'événements : si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements de Ω, indexée par une partie finie I de $\mathbb{N}$, alors

- $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i$ est l'événement « $\boxed{}$ »,
- $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i$ est l'événement « $\boxed{}$ »,
- $\displaystyle\bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$ est l'événement « $\boxed{}$ ».

Les lois de Morgan se généralisent ainsi :

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \qquad \text{et} \qquad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i},$$

et la distributivité ainsi : pour tout $B \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i) \qquad \text{et} \qquad B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i).$$