6) Application aux tirages

Nous avons vu plusieurs techniques de dénombrement :

- introduction d'une bijection avec un ensemble que l'on sait dénombrer,
- codage par une liste,
- utilisation d'un arbre binaire,
- découpage en parties disjointes que l'on sait dénombrer,
- dénombrement du complémentaire.

Dans la plupart des problèmes de dénombrement que nous rencontrerons, on pourra aussi se ramener (éventuellement via une bijection) à considérer un problème de tirage équivalent : tirage simultanée, tirages successifs avec ou sans remise. Voyons-cela en détail.

On considère des tirages de p éléments parmi n éléments. Par exemple :

- tirage de p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
- tirage de p cartes dans un jeu de n cartes.
- lancer de p dés à n faces.

a) Tirages successifs avec remise

On suppose que l'on réalise un tirage de p éléments parmi n éléments, en les remettant à chaque nouveau tirage. A chaque tirage, on a donc toujours n choix (pour les lancers de dés, cela correspond à lancer p fois un même dé à n faces).

On peut coder le tirage par une p-liste $(x_1, \dots, x_p)$ où, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, x_i est le numéro de la $i^{\text{ième}}$ boule tirée (ou le numéro de la $i^{\text{ième}}$ carte tirée, ou le numéro obtenu au $i^{\text{ième}}$ lancer de dé...).

Il s'ensuit qu'il y a n^p tirages successifs avec remise de p éléments parmi n.

b) Tirages successifs sans remise

On suppose que l'on réalise un tirage de p éléments parmi n éléments (avec $p \leqslant n$), sans les remettre à chaque nouveau tirage. Au premier tirage il y a n choix. A chaque nouveau tirage, il y a un choix de moins que le tirage précédent.

On peut coder le tirage par une p-liste $(x_1, \dots, x_p)$ d'éléments distincts où, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, x_i est le numéro de la $i^{\text{ième}}$ boule tirée (ou le numéro de la $i^{\text{ième}}$ carte...).

Il s'ensuit qu'il y a $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ tirages successifs sans remise de p éléments parmi n.

c) Tirages simultanés

On suppose que l'on réalise un tirage de p éléments simultanément parmi n éléments (avec $p \leqslant n$).

On peut coder le tirage par une partie A de cardinal p contenant les numéros des boules tirés (ou les numéros des cartes tirées...).

Il s'ensuit qu'il y a $\dbinom{n}{p}$ tirages simultanés de p éléments parmi n.

Il sera parfois utile de voir un tirage de p éléments simultanément comme la succession de p tirages sans remise puis de ne pas considérer l'ordre.