Chapitre 7

Ensembles et applications

I Ensembles

1) Ensembles et éléments

Dans le chapitre 1 (*Logique et raisonnements*), nous avons introduit la notion d'ensemble. Rappelons quelques définitions :

Définition. *Un ensemble E est une collection d'objets appelés éléments de E. On note $x \in E$ pour dire que l'élément x appartient à E. On note $x \notin E$ pour dire que l'élément x n'appartient pas à E.*
On dit que deux ensembles E et F sont égaux, et on note $E = F$, si ils ont les mêmes éléments.
Un ensemble ayant un élément x et un seul est appelé singleton et noté $\{x\}$.

Un ensemble peut être défini :

- par *extension* : en listant tous ses éléments entre accolades. Dans ce cas, l'ordre dans lequel les éléments sont listés, n'a pas d'importance. De plus chaque élément figure une seule fois dans la liste.
- par *compréhension* : si P est une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E, alors on note $\{x \in E \,|\, P(x)\}$ l'ensemble des éléments x de E tels que $P(x)$ est vraie.

Exemples :

2) Parties d'un ensemble

Définition. *Soient E et F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F (ou que E est une partie de F ou encore que E est un sous-ensemble de F), et on note $E \subset F$, si*

Si E n'est pas inclus dans F, on note $E \not\subset F$.
Si $E \subset F$ et $E \neq F$, on dit que l'inclusion est stricte et on note $E \subsetneq F$.

Remarques :

- Pour montrer que E est inclus dans F, on se donne un élément x de E et on montre que x est un élément de F. On commence donc par écrire
- Tout ensemble est inclus dans lui-même.
- Par transitivité de l'implication, si F est inclus dans un ensemble G, alors E est inclus dans G.

Il résulte de la définition l'équivalence suivante :

Proposition (double inclusion). *Si E et F sont deux ensembles, alors on a*

Pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux, on montera souvent que l'un est inclus dans l'autre et vice versa. On dit qu'on procède par double inclusion.

Exemples :

Ne pas confondre appartenance et inclusion. Par exemple, .

On définit un ensemble qui ne contient aucun élément :

Définition. *On appelle ensemble vide, et on note $\varnothing$, l'ensemble ne contenant aucun élément. Il est inclus dans tout autre ensemble et il ne possède qu'une seul sous ensemble : lui-même.*

Définition. *Soit E un ensemble. On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On a alors*

Remarques :

Exemples :

- *Si on lance une pièce de monnaie, alors on pourra considérer l'univers $\Omega = \{P, F\}$ et l'ensemble des événements est donc*
- *Si on lance un dé à 6 faces, on peut coder le résultat par un élément de $\Omega = [\![1, 6]\!]$. En langage probabiliste on dira que Ω est l'univers associé à l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé. On appellera toute partie de Ω un événement. Par exemple $\{1, 3, 5\}$ correspond à l'événement « obtenir un chiffre impair ». Ainsi $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des événements.*

3) Opérations sur les parties d'un ensemble

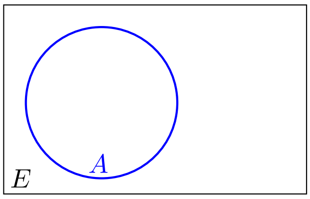
Dans toute la suite, E et F désignent des ensembles non vides.

Définition. *Soient A et B deux parties de E. On définit les parties suivantes de E :*

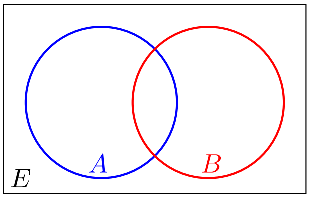
- *, le complémentaire de A dans E.*
- *, l'union (ou la réunion) de A et B.*
- *, l'intersection de A et B.*
- *, la différence de A moins B.*

Remarques :

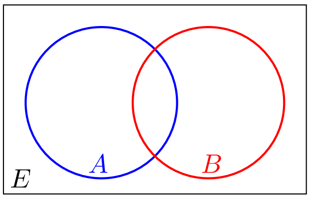
- On note souvent $\overline{A}$ au lieu de $\complement_E A$ quand il n'y a pas d'ambigüité sur E.
- On a $A \backslash B = A \cap \overline{B}$. De plus, si $B \subset A$, alors $A \backslash B = \complement_A B$.
- On peut représenter ces parties grâces aux diagrammes de Venn (pour chaque diagramme, la zone colorée en gris correspond à la partie indiquée en dessous) :



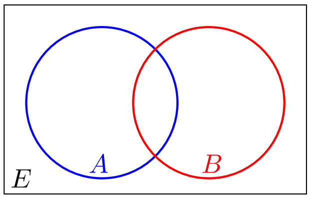
$\overline{A}$



$A \cap B$



$A \cup B$



$A \backslash B$

Proposition. *Posons $A = \{ x \in E \,|\, P(x) \}$ et $B = \{ x \in E \,|\, Q(x) \}$, où P et Q des propriétés portant sur les éléments de E. On a*

et .

~~> Exercice.

Exemple : *Notons $A = \{ n \in [\![1, 12]\!] \,|\, P(n) \}$ et $B = \{ n \in [\![1, 12]\!] \,|\, Q(n) \}$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$P(n) \;:\; \text{« } n \text{ est un multiple de } 2 \text{ »} \qquad \text{et} \qquad Q(n) \;:\; \text{« } n \text{ est un multiple de } 3 \text{ »}.$$

Proposition. *Soient A, B et C des parties de E.*

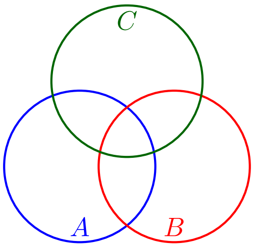
- *(commutativité) $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$,*
- *(associativité) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ et $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,*
- *(distributivité)*
- *(idempotence) $A \cap A = A$ et $A \cup A = A$,*
- *$\varnothing \cap A = \varnothing$ et $\varnothing \cup A = A$,*
- *$E \cap A = E$ et $E \cup A = E$,*
- *$(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$.*

Démonstration. Nous laissons la preuve des points précédents en exercice. Notons que les quatre premiers points découlent des propriétés analogues sur les propositions. Par exemple pour la distributivité, si $x \in E$,

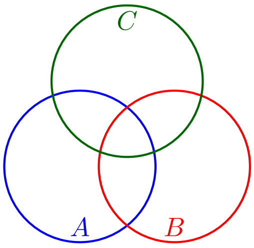
□

Remarque : L'associativité de la réunion (resp. de l'intersection) nous permet d'écrire : $A \cup B \cup C$ (resp. $A \cap B \cap C$) au lieu de $A \cup (B \cup C)$ (resp. $A \cap (B \cap C)$).

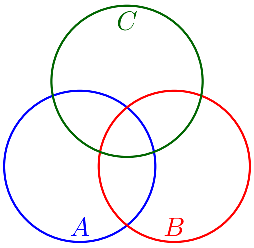
Voici les diagrammes de Venn illustrant l'associativité et la distributivité :



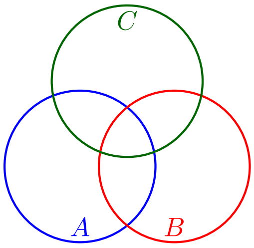
$A \cap B \cap C$



$A \cup B \cup C$



$A \cup (B \cap C) =$
$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

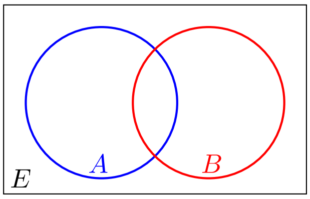


$A \cap (B \cup C) =$
$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

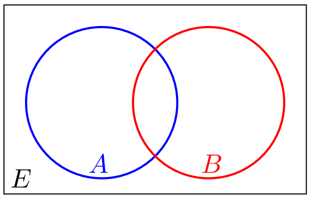
Proposition. *Soient A et B des parties de E.*

1. *Pour tout $x \in E$, nous avons :* $\quad x \in \overline{A} \iff x \notin A \iff \mathrm{non}(x \in A).$
2. $\overline{\varnothing} = E$, $\overline{E} = \varnothing$ *et* $\overline{\overline{A}} = A$,
3. $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$,
4. *(lois de Morgan)*

Voici les diagrammes de Venn illustrant les lois de Morgan :



$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$



$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Démonstration. Nous laissons la démonstration des points 1 à 2 en exercice.

□

Exemple : *Reprenons l'exemple précédent avec les ensembles $A = \{\, n \in [\![1, 12]\!] \mid n$ est un multiple de $2 \,\}$ et $B = \{\, n \in [\![1, 12]\!] \mid n$ est un multiple de $3 \,\}$. On a*

Définition. *Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On dit que A et B sont disjointes si $A \cap B = \varnothing$. Dans ce cas, on dit que $A \cup B$ est une union disjointe.*

Ne pas confondre distincts et disjoints :

- A et B sont distincts (c'est-à-dire $A \neq B$) si et seulement si
- A et B sont disjoints si et seulement si

4) Produit cartésien

Définition. *On appelle couple d'éléments de E et F la donnée d'un élément x de E puis d'un élément y de F, dans cet ordre. On le note (x, y).*

On appelle produit cartésien de E et F, et on note $E \times F$, l'ensemble des couples d'éléments de E et F.

Remarque : Le produit cartésien $E \times F$ se prononce "E croix F".

Exemples :

Comme on le voit sur le premier exemple, $E \times F \neq F \times E$ en général !

Définition. *Plus généralement, donnons-nous $n \in \mathbb{N}^*$ et n ensembles $E_1, \ldots, E_n$. On appelle n-uplet d'éléments de $E_1, \ldots, E_n$ la donnée d'un élément x_1 de E_1, puis d'un élément x_2 de E_2, ... et d'un élément x_n de E_n, dans cet ordre. On le note $(x_1, \ldots, x_n)$.*

On appelle produit cartésien de $E_1, \ldots, E_n$, et on note $E_1 \times \cdots \times E_n$, l'ensemble des n-uplet d'éléments de $E_1, \ldots, E_n$.

Si $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$, alors on note $\boxed{}$ *au lieu de $E_1 \times \cdots \times E_n = E \times E \times \cdots \times E$.*

Exemple : *Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets de réels.*

Remarques :

- La notion de produit cartésien permet aussi un raccourci de notations. Par exemple on pourra écrire « $\forall (x, y, z) \in E^2 \times F$ » au lieu de « $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in F$ » . Idem avec les « $\exists$ ».
- Ne pas confondre $(x_1, \ldots, x_n)$ avec l'ensemble $\{ x_i \,|\, 1 \in [\![1, n]\!] \}$.

5) Familles d'éléments

Définition. *Soit I un ensemble non vide (appelé ensemble d'indices) et E un autre ensemble. On appelle famille d'éléments de E indexée par I la donnée, pour tout $i \in I$, d'un unique élément x_i de E. On la note $(x_i)_{i \in I}$.*

Remarques :

- Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $I = [\![1, n]\!]$, alors $(x_i)_{i \in I}$ est le n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$.
- Si $I = \mathbb{N}$, alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E.
- Ne pas confondre $(x_i)_{i \in I}$ avec l'ensemble $\{ x_i \,|\, i \in I \}$.

Définition. *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E (i.e. une famille d'éléments de $\mathcal{P}(E)$) indexée par un ensemble non vide I. On définit :*

- *la réunion de la famille $(A_i)_{i \in I}$ par*
- *l'intersection de la famille $(A_i)_{i \in I}$ par*

Si $I = \{p, \ldots, n\}$ avec p et n des entiers naturels tels que $p \leqslant n$, alors on note $\bigcup_{i=p}^{n}$ au lieu de $\bigcup_{i \in I}$ et $\bigcap_{i=p}^{n}$ au lieu de $\bigcap_{i \in I}$.

Exemple : *Nous avons* $\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right] =]0, 1]$. *Montrons-le par double inclusion :*

Proposition. *Soient B une partie de E et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E. Nous avons :*

- *(distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$)*
- *(distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$)*
- *(lois de Morgan)*

Démonstration.

$\square$

Définition (partition). *Une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E est appelée partition de E si*

-
-
-

Exemple :

II Applications

Soient E, F, G et H des ensembles non vides.

1) Notion d'application

Définition. *Définir une application f de E dans F consiste à associer à tout x dans E un unique élément y de F, noté $f(x)$ et appelé image de x. Pour tout y dans F, tout élément x de E vérifiant $y = f(x)$ est appelé antécédent de y par f.*

L'ensemble E est appelé ensemble de départ de f. L'ensemble F est appelé ensemble d'arrivée de f.

On note $f : E \longrightarrow F$ pour désigner une application f de E dans F. On dit aussi f est une application définie sur E et à valeurs dans F. On note aussi $f \; : \; \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ ou encore $f : x \in E \longmapsto f(x) \in F$ pour désigner une application f de E dans F qui à $x \in E$ associe $f(x) \in F$.

On note $\boxed{\quad\quad}$ ou $\boxed{\quad\quad\quad}$ l'ensemble des applications de E dans F.

Remarques :

- Dans l'expression $x \longmapsto f(x)$, la lettre x est muette et peut donc être remplacée par une autre variable.
- Soit $f : E \longrightarrow F$. Il peut ne pas exister d'antécédent par f à un élément y de F. Il peut aussi en exister plus d'un. Par contre un élément x de E admet une seule image par f.
- On parle souvent de fonction plutôt que d'application. En fait la notion de fonction est plus générale que la notion d'application : une fonction associe à tout élément de l'ensemble de départ au plus un élément de l'ensemble d'arrivée (possiblement aucun). Plus formellement, une fonction f est la donnée d'un ensemble de départ E, d'un ensemble d'arrivée F et d'une partie Γ de $E \times F$ (appelée graphe de f) telle que
$$\forall (x, y, y') \in E \times F \times F, \qquad \big((x, y) \in \Gamma \quad \text{et} \quad (x, y') \in \Gamma\big) \quad \Longrightarrow \quad y = y'.$$
Lorsqu'on étudiera une fonction f cette année, on commencera toujours par déterminer son domaine de définition D_f. On se ramènera à l'étude de l'application f définie sur $E = D_f$.
- Une famille d'éléments d'un ensemble E indexée par un ensemble I est une autre façon de noter une application de I dans E.
- ⚠ Ne pas confondre une application f avec la formule (si elle existe) donnant $f(x)$ en fonction de x. Ainsi on écrira jamais « Soit $f(x)$ une application » mais plutôt « Soit f une application qui à x associe $f(x)$ ».
- Soient E, F et G trois ensembles tels que $F \subsetneq G$. Soit f une application de E dans F. On peut encore dire que f est une application de E dans G. Mais ce n'est plus tout à fait la même application :

Définition. *Deux applications f et g sont égales si et seulement si elles ont le même ensemble de départ (notons-le E), le même ensemble d'arrivée et, pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.*

Exemples :

Définition. *Soit f une application de E dans F. On appelle graphe de f la partie de $E \times F$ composée de tous les couples $\big(x, f(x)\big)$ tels que $x \in E$.*

Remarque : Le graphe de f est $\left\{ (x,y) \in E \times F \,\middle|\, x \in E,\, y = f(x) \right\}$.

Définition (image par une application). *Soit f une application de E dans F. Soit A une partie de E. On appelle image (ou image directe) et on note $f(A)$ l'ensemble*

c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par $f(x)$ lorsque x parcourt A. On notera souvent plus simplement

Exemple : *L'ensemble $A = \{2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82, 101\}$ peut se noter $\{\, n \in \mathbb{N} \,|\, \exists\, k \in \mathbb{N},\, n = k^2 + 1\}$. Mais on remarque qu'il s'agit de l'image de $\mathbb{N}$ par l'application $x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 + 1$. On peut donc aussi le noter*

Remarque : Avec cette dernière notation, on dit que l'ensemble est défini sous forme paramétrique (nous utiliserons essentiellement ce terme dans le chapitre *Introduction des espaces vectoriels*).

Définition (application identité). *L'application $\begin{array}{rccc} \mathrm{Id}_E : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$ est appelée application (ou fonction) identité de E.*

Définition (application constante). *On dit qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est constante si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :*

- *pour tout $(x, y) \in E^2$, $f(x) = f(y)$.*
- *il existe $\alpha \in F$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) = \alpha$. On dit alors que f est l'application constante égale à α.*

2) Composition les applications

Définition. *Soit F' un ensemble tel que $F \subset F'$. Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F' \longrightarrow G$ sont des applications, alors on définit la composée de f par g, et on note $g \circ f$, l'application*

Remarque : Si f est une application de E dans F, alors $\mathrm{Id}_F \circ f = f$ et $f \circ \mathrm{Id}_E = f$.

Exemple :

Proposition (associativité de la composition). *Si $f \in F^E$, $g \in G^F$ et $h \in H^G$, alors*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

On note alors plus simplement $h \circ g \circ f$.

Démonstration. Par définition $h \circ g$ est une application de F dans H donc $(h \circ g) \circ f$ est une application de E dans H. De même $h \circ (g \circ f)$ est une application de E dans H. On a bien l'égalité des ensembles de départ et l'égalité des ensembles d'arrivée. Ensuite, donnons-nous $x \in E$ et posons $y = f(x) \in F$. Nous avons

$$\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(y) = h(g(y)) = h((g \circ f)(x)) = \big(h \circ (g \circ f)\big)(x).$$

Ainsi $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. $\square$