Chapitre 5

Généralités sur les suites de nombres réels

I Notion de suite de nombres réels

1) Définitions

Définition. *Une suite réelle (ou site numérique) u est la donnée*[1] *pour chaque entier naturel $n \in \mathbb{N}$ d'un réel, appelé terme général de rang n (ou d'indice n) de la suite et noté u_n. La suite u se note aussi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$.*

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$.

On fera bien attention de ne pas confondre la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et son terme général u_n. Et de ne pas la confondre avec l'ensemble $\{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ des valeurs de la suite. Il y a un nombre infini d'indices, mais l'ensemble des valeurs peut être fini.

Il arrive qu'une suite ne soit pas définie pour les premières valeurs de $\mathbb{N}$.

Définition. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On appelle aussi suite de nombres réelles la donnée de u_n pour chaque $n \geqslant n_0$. On la note alors $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. On dit que la suite est définie à partir du rang n_0. Le terme u_{n_0} s'appelle le terme initial de la suite.*

On peut définir une suite de différentes manières.

1. **Suites définies explicitement.** On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie explicitement lorsque l'on donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.

   Par exemple, on définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 5\cdot(-2)^n, \qquad v_n = \frac{1}{n^2+1}\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right), \qquad w_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3^n}} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

2. **Suites définies par récurrence.** On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence lorsque l'on donne
   - les valeurs de $u_0, \dots, u_{p-1}$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$,
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_{n+p} en fonction des p termes précédents.

   On dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence d'ordre p.

   Par exemple, on définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence en posant

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 5a_n + n + 2, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} b_0 = 2,\ b_1 = 3,\ b_2 = -1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+3} = -3b_{n+1} + 4b_n + n^2. \end{cases}$$

   La suite de Syracuse est la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad s_{n+1} = \begin{cases} 3s_n + 1 & \text{si } s_n \text{ est impair,} \\ \dfrac{s_n}{2} & \text{si } s_n \text{ est pair.} \end{cases}$$

3. **Suites définies implicitement.** On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie implicitement lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit u_n comme l'unique solution d'une certaine équation.

   Par exemple, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n la plus grande solution de $x^{n+2} + x^{n+1} + x = 1$.

---

1. Autrement dit une suite u est une application $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ mais, au lieu de la noter $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array}$, on la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Définition. *Soit P une propriété portant sur les entiers naturels. Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $P(n)$ est vraie. On dit alors indifféremment que :*

- *La propriété P est vraie à partir d'un certain rang.*
- *$P(n)$ (est vraie) pour n assez grand*

Définition. *On dit qu'une suite vérifie une certaine propriété à partir d'un certain rang lorsqu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ satisfait la propriété.*

Exemple : *La suite $(n^2-100)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs à partir d'un certain rang (du rang $n = 10$ pour être précis). On peut dire aussi $n^2 - 100 \geqslant 0$ pour n assez grand.*

2) Opérations sur les suites

Définition. *Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On désigne par*

- *$|u|$ la suite w définie par :* $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = |u_n|$.
- *$u + v$ la suite w définie par :* $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = u_n + v_n$.
- *αu la suite w définie par :* $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \alpha u_n$.
- *$uv =$ la suite w définie par :* $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = u_n v_n$.

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$, on désigne par :

- $\dfrac{1}{v}$ *la suite w définie par* $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \dfrac{1}{v_n}$.
- $\dfrac{u}{v}$ *la suite w définie par* $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

3) Propriétés générales

Définition (monotonie). *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle est dite*

- *constante si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a$,*
- *stationnaire si il existe $a \in \mathbb{R}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = a$,*
- *croissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$,*
- *décroissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$,*
- *strictement croissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$,*
- *strictement décroissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > u_{n+1}$,*
- *monotone si elle est croissante ou décroissante,*
- *strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*
- *périodique si il existe $T \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+T} = u_n$,*

Pour déterminer le sens de variation d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle, on peut :

- étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- comparer 1 avec u_{n+1}/u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, lorsque la suite ne s'annule pas.
- étudier le sens de variation de f, lorsque la suite est donnée explicitement sous la forme par $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec f une fonction définie sur $[0, +\infty[$.

Exemple : *Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 5u_n + 5$. Étudions ses variations : pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 5u_n + 5 - u_n = u_n^2 - 6u_n + 5 = (u_n + 5)(u_n + 1).$$

Montrons par récurrence que $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous avons $u_0 = 1$ donc la propriété est vraie au rang 0. Supposons qu'elle soit vraie au rang n pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Nous avons alors $u_{n+1} = u_n + (u_n + 5)(u_n + 1) \geqslant 0$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$. D'où le résultat par récurrence.
Nous avons enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n + 5)(u_n + 1) \geqslant 0$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Définition. *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite*

- *majorée si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.*
- *minorée si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$.*
- *bornée si elle est à la fois majorée et minorée.*

Exemples : *La suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par 1. La suite $(n^2+1)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 mais n'est pas majorée.*

Remarque : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. En effet, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par m et majorée par M alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad -\max(|m|,|M|) \leqslant -|m| \leqslant m \leqslant u_n \leqslant M \leqslant |M| \leqslant \max(|m|,|M|)$$

et donc $|u_n| \leqslant \max(|m|,|M|)$. La réciproque est immédiate.

II Exemples de suites réelles

1) Suites arithmétiques

Définition. *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique si il existe un réel r tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + r.$$

Le réel r est appelé la raison de la suite et u_0 le terme initial.

Proposition. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle est arithmétique de raison r si et seulement si*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = u_0 + rn.$$

$\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Proposition. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$.*

1. *Pour tous entiers naturels n et p tels que $n \geqslant p$, $u_n = u_p + r(n-p)$.*
2. *Monotonie :*
   - *Si $r > 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.*
   - *Si $r = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.*
   - *Si $r < 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.*
3. *Pour tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\left(u_0 + \frac{rn}{2}\right) = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$.*

DÉMONSTRATION. Les deux premiers points se démontrent par récurrence (ils sont laissés en exercice). Montrons le troisième point : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_0 + r\sum_{k=0}^{n} k = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2} = (n+1)\left(u_0 + \frac{rn}{2}\right) = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}.$$

$\square$

2) Suites géométriques

Définition. *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique si il existe un réel q tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = qu_n.$$

Le réel q est appelé la raison de la suite et u_0 le terme initial.

Proposition. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle est géométrique de raison q si et seulement si*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = u_0 q^n.$$

$\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Proposition. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}^*$.*

1. *Pour tous entiers naturels n et p tels que $n \geqslant p$, $u_n = u_p q^{n-p}$.*
2. *Monotonie :*
   - *Si $q > 1$ et $u_0 > 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.*
   - *Si $q > 1$ et $u_0 < 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.*
   - *Si $q = 1$ ou $u_0 = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.*
   - *Si $q \in]0,1[$ et $u_0 > 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.*
   - *Si $q \in]0,1[$ et $u_0 < 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.*
   - *Si $q = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à 0.*
   - *Si $q \in]-\infty,-1[\,\cup\,]-1,0[$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.*
   - *Si $q = -1$ et $u_0 \neq 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend que deux valeurs.*
3. *Pour tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q}$.*

DÉMONSTRATION. Les deux premiers points se démontrent par récurrence (ils sont laissés en exercice). Montrons le troisième point : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \sum_{k=0}^{n} q^k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{u_0 - u_0 q^{n+1}}{1-q} = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q}.$$

□

3) Suites arithmético-géométriques

Définition. *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmético-géométrique si il existe deux réels a et b tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = a u_n + b.$$

Remarques :

- Si $a = 1$, alors il s'agit d'une suite arithmétique de raison b.
- Si $b = 0$, alors il s'agit d'une suite géométrique de raison a.