Chapitre 3

Étude de fonctions réelles d'une variable réelle

L'objectif de ce chapitre est de rappeler les résultats principaux vus au lycée concernant l'étude des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Nous allons énoncer un certain nombre de résultats concernant les propriétés globales (parité, monotonie...) et locales (limites, continuité et dérivabilité en un point) de ces fonctions. Nous allons également dresser un catalogue de fonctions usuelles et de leurs propriétés. Les démonstrations de ces résultats seront reportées aux chapitres *Étude locale des fonctions : limites et continuité en un point*, *Étude globale de fonctions : continuité sur un intervalle* et *Dérivation*, dans lesquels nous étudierons en détail les fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

I Généralités sur les fonctions réelles d'une variable réelle

Dans tout ce paragraphe, I et J désigneront des intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point.

1) Introduction

Définition. *Une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ (ou à valeurs dans $\mathbb{R}$) est la donnée pour chaque réel x d'au plus un réel, appelé image de x par f et noté $f(x)$.*

L'ensemble des réels de I admettant une image (nécessairement unique) par f est appelé ensemble de définition de f et noté D_f. Lorsque $I = D_f$, on dit que f est définie sur I (ou que f est une application de I dans $\mathbb{R}$).

On note $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ pour désigner une fonction f définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note aussi

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \qquad \text{ou encore} \qquad f : x \in I \longmapsto f(x) \in \mathbb{R}$$

pour désigner une fonction f définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et qui à $x \in I$ associe $f(x)$.

On note $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}^I$ l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$.

Remarques :

- On commencera **toujours** par déterminer l'ensemble de définition de f. Cette année, nous ne rencontrerons que des fonctions dont le domaine de définition est un intervalle ou la réunion d'intervalles. On se se ramènera ensuite à étudier f sur chacun des intervalles où elle est définie.
- Nous étudierons de façon plus abstraite les applications dans le chapitre *Ensembles et applications*.
- La variable x est muette...
- $f(x)$ est un nombre ! On n'écrit **jamais** « Soit $f(x)$ une fonction » mais « Soit f la fonction qui à x associe $f(x)$ ». On ne parle pas de la fonction $f(x)$ mais de la fonction f. Dans le même ordre d'idée, on écrit au choix :
  - (le nombre) $f(x)$ est défini si et seulement si $x \in I$,
  - f est définie sur I,

  mais pas un mélange des deux phrases (du style « f est définie si et seulement si $x \in I$ »... qu'est-ce que x pour f puisque la variable est muette ?)

Définition (ensemble image). *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On note $\boxed{\qquad\qquad}$ ou plus simplement $\boxed{\qquad}$ l'ensemble des valeurs prises par $f(x)$ lorsque x décrit I. On dit aussi que f est à valeurs dans $f(I)$.*

Exemple : *Si $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2$, alors* $\boxed{\qquad\qquad}$.

On peut tout à fait dire que f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ mais il est plus précis de dire que f est à valeurs dans $\boxed{\qquad}$.

Définition (antécédent). *Soient y un réel et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si x est un réel de I tel que $y = f(x)$, alors on dit que x est un antécédent par f de y.*

Remarque : Il se peut qu'un réel n'admette pas d'antécédent par f, il se peut aussi qu'il en admette plusieurs.

Par exemple, si $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2$, alors le réel -1 n'admet par d'antécédent par f. Par contre le réel 4 en admet deux : -2 et 2.

Définition (courbe représentative). *Nous munissons le plan d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, on appelle courbe représentative de f, et on note $\mathscr{C}_f$, l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont $(x, f(x))$, pour $x \in I$.*

Définition. *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que les fonctions f et g sont égales sur I si*

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = g(x).$$

2) Opération sur les fonctions réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$

Définition. *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction*

- *$|f|$ est définie sur I par : $\quad \forall x \in I, \quad |f|(x) = |f(x)|$.*
- *$f+g$ est définie sur I par : $\quad \forall x \in I, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$.*
- *αf est définie sur I par : $\quad \forall x \in I, \quad (\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$.*
- *fg est définie sur I par : $\quad \forall x \in I, \quad (fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$.*

Supposons que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Alors la fonction

- *$\dfrac{1}{g}$ est définie sur I par : $\quad \forall x \in I, \quad \left(\dfrac{1}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{g(x)}$.*
- *$\dfrac{f}{g}$ est définie sur I par : $\quad \forall x \in I, \quad \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.*

Définition. *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications telles que (c'est-à-dire,). La fonction $g \circ f$, appelée composée de f par g, est alors définie sur I par :*

3) Fonction bijective et réciproque

Définition. *Une fonction f définie sur I et à valeurs réelles. Soit J un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. On dit que f est bijective (ou une bijection) de I sur J si tout réel de J admet un unique antécédent par f, c'est-à-dire :*

Dans ce cas, on appelle fonction réciproque de f et on note f^{-1}, la fonction qui à $y \in J$ associe l'unique antécédent de y par f.

Remarques :

- Ne pas confondre la réciproque f^{-1} d'une bijection f avec la fonction $\dfrac{1}{f}$. La notation est réservée à la réciproque.
- Si f est une bijection de I sur J de fonction réciproque f^{-1}, alors

  $\forall x \in I,$ et $\forall y \in J,$

- La fonction f est une bijection de I sur J si et seulement si il existe une fonction $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

  La fonction g est alors la fonction réciproque f^{-1} de f. Il s'agit elle-même d'une bijection de J sur I. Nous montrerons cela dans le chapitre *Ensembles et applications*.
- On montrera dans le chapitre *Étude globale de fonctions : continuité sur un intervalle* que, si f est une bijection, alors les courbes représentatives de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes, *i.e.* la droite d'équation $y = x$.

Exemple : *Considérons la fonction $f : x \in]2, +\infty[\longmapsto \dfrac{x+3}{x-2}$. Il s'agit d'une bijection de $]2, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$. En effet :*

4) Propriétés globales des fonctions réelles de la variable réelle

a) Signe d'une fonction

Définition. *Soient $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset D_f$. On dit que*

- *f est positive sur A si, pour tout $x \in A$, $f(x) \geqslant 0$.*
- *f est négative sur A si, pour tout $x \in A$, $f(x) \leqslant 0$.*
- *f est strictement positive sur A si, pour tout $x \in A$, $f(x) > 0$.*
- *f est strictement négative sur A si, pour tout $x \in A$, $f(x) < 0$.*
- *f est non nulle sur A si il existe $x \in A$ tel que $f(x) \neq 0$.*
- *f ne s'annule pas sur A si, pour tout $x \in A$, $f(x) \neq 0$.*

b) Propriétés de symétrie

Définition (périodicité). *Soit T un réel strictement positif. Une fonction $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite T-périodique si*

On dit que T est une période de f.

Remarques :

- Si f est périodique sur D_f, alors il y a une infinité de période. En effet, si T est une période de f, alors on montre par récurrence que

  On cherche souvent la plus petit période possible.
- Si f est T-périodique sur D_f, alors on peut restreindre son étude sur un intervalle d'amplitude T (le plus souvent $[0, T]$ ou $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$). Le reste de la courbe représentative de f se déduit ensuite par translations de vecteurs $kT \cdot \vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Définition (parité). *Une fonction $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite*

- *paire sur D_f si, pour tout $x \in D_f$,*
- *impaire sur D_f si, pour tout $x \in D_f$,*

Remarques :

- Si f est paire sur D_f, alors $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Si f est impaire sur D_f, alors $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport au centre O du repère.
- Si f est paire ou impaire sur D_f, alors on peut restreindre son étude à $D_f \cap \mathbb{R}_+$ ou à $D_f \cap \mathbb{R}_-$.

c) Fonctions monotones

Définition (fonction monotone). *Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite*

- *croissante sur I si, pour tous x et y dans I tels que $x \leqslant y$, on a $f(x) \leqslant f(y)$.*
- *décroissante sur I si, pour tous x et y dans I tels que $x \leqslant y$, on a $f(x) \geqslant f(y)$.*
- *strictement croissante sur I si, pour tous x et y dans I tels que $x < y$, on a $f(x) < f(y)$.*
- *strictement décroissante sur I si, pour tous x et y dans I tels que $x < y$, on a $f(x) > f(y)$.*
- *monotone sur I si f est croissante ou décroissante sur I.*
- *strictement monotone sur I si f est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.*

Proposition. *Si f est une fonction strictement croissante sur I alors, pour tous x et y dans I,*

$$x \leqslant y \iff f(x) \leqslant f(y) \quad \text{et} \quad x < y \iff f(x) < f(y).$$

Si f est une fonction strictement décroissante sur I alors, pour tous x et y dans I,

$$x \leqslant y \iff f(x) \geqslant f(y) \quad \text{et} \quad x < y \iff f(x) > f(y).$$

Démonstration.

□

d) Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs réelles.*

- *On dit que f est majorée sur I si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant M$.*
  Le réel M est alors appelé majorant de f sur I.
- *On dit que f est minorée sur I si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant m$.*
  Le réel m est alors appelé minorant de f sur I.
- *On dit que f est bornée sur I si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire si il existe deux réels m et M tels que, pour tout $x \in I$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.*

Proposition. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs réelles. La fonction f est bornée sur I si et seulement si la fonction $|f|$ est majorée sur I.*

Démonstration.

□

II Limites, continuité et dérivabilité (rappels de Terminale S)

Nous supposons connues les notions de limites, de continuité et de dérivabilité, ainsi que leurs propriétés vues en *Terminale S*. Nous reverrons tout cela en détail prochainement dans les chapitres *Étude locale des fonctions : limites et continuité en un point*, *Étude globale de fonctions : continuité sur un intervalle* et *Dérivation*. Rappelons quelques résultats utiles pour l'étude des fonctions réelles d'une variable réelle.

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point.

1) Limites

a) Notion de limite

Rappels de Terminale S. Soient $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

- On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en x_0 si, quelque soit l'intervalle ouvert J centré en ℓ, il existe un intervalle ouvert I centré en x_0 tel que, pour tout x dans I, $f(x) \in J$.
- On dit que f admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour limite en x_0 si, pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un intervalle ouvert I centré en x_0 tel que, pour tout x dans I, $f(x) \geqslant A$ (resp. $f(x) \leqslant A$).
- On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en $+\infty$ (resp. $-\infty$), si quelque soit l'intervalle ouvert J centré en ℓ, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \geqslant B$ (resp. $x \leqslant B$), $f(x) \in J$.
- On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si, pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \geqslant B$ (resp. $x \leqslant B$), $f(x) \geqslant A$.
- On dit que f admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si, pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \geqslant B$ (resp. $x \leqslant B$), $f(x) \leqslant A$.

Nous renvoyons au formulaire *Opérations sur les limites* distribué le premier jour, pour des tableaux récapitulatifs des opérations dites algébriques sur les limites de fonctions [1]. On parle de forme indéterminée (et on note F.I.) quand on ne peut pas déterminer la limite d'une opération sur les fonctions (du moins de manière générale). Dans ce cas, il faut faire une étude au cas par cas.

Proposition. *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications telles que $f(I) \subset J$. Soit a (resp. b) un point ou une extrémité de I (resp. J), éventuellement $\pm\infty$. Soit ℓ un réel ou $\pm\infty$.*

Si $\boxed{}$ *et* $\boxed{}$ *alors* $\boxed{}$.

Exemple :

b) Asymptotes

Définition (asymptotes). *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Notons $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.*

- *Soit x_0 une (éventuelle) extrémité réelle de I. Si f admet $\pm\infty$ pour limite en x_0, on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$ en x_0. On dit aussi que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées en x_0.*
- *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Si I n'est pas majorée (resp. minorée) et si*

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0 \qquad \left(\text{resp.} \quad \lim_{x \to -\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0\right),$$

  on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ (resp. en ∞).
  - *Si $a \neq 0$, on parle d'asymptote oblique.*
  - *Si $a = 0$, on parle d'asymptote horizontale. On dit aussi que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote parallèle à l'axe des abscisses en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).*

Remarque : Dans le deuxième cas, on peut également être amené à étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote. Pour cela on étudie le signe de $f(x) - \ell$ ou $f(x) - ax - b$ selon le cas. Si le signe est positif alors la courbe est au-dessus, sinon elle est en-dessous.

2) Continuité

Rappels de Terminale S.

- Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite continue en un point $x_0 \in I$ si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- La fonction f est dite continue sur I si elle est continue en tout point de I.

Proposition. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I. Nous avons :*

- *Les fonctions $|f|$, αf, $f + g$ et fg sont continues sur I.*
- *Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors la fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur I.*
- *Si $h : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$, alors $h \circ f$ est continue sur I.*

1. Dans le poly, ℓ et ℓ' désignent des réels et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur I et admettant des limites en x_0 (x_0 étant un point de I ou une extrémité de I, éventuellement $\pm\infty$)

Théorème (théorème des valeurs intermédiaires). *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a,b]$ alors, pour tout réel t compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = t$. C'est-à-dire f atteint toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.*

Théorème (théorème de la bijection - version faible). *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et strictement monotone sur $[a,b]$ alors, pour tout réel t compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = t$.*

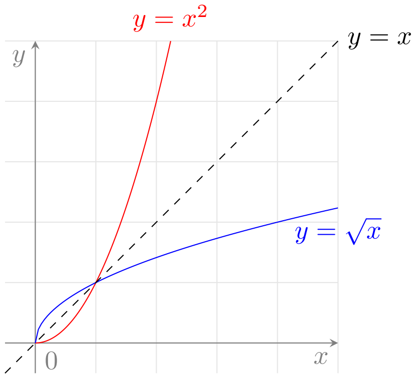
Remarque : Ce théorème est souvent appelé *corollaire du théorème de la bijection* en classe de Terminale. Nous verrons la version complète lors du chapitre *Propriétés globales des fonctions : continuité sur un intervalle.*

Corollaire. *Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout réel positif y, il existe un unique réel positif x tel que $x^n = y$. Ce réel est appelé racine $n^{\text{ième}}$ de y et noté $y^{1/n}$ ou $\sqrt[n]{y}$.*

Démonstration.

□

Illustrons ce corollaire pour $n = 2$. La fonction réciproque de $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto x^2$ est la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \sqrt{x}$. Traçons leurs courbes représentatives respectives :



Remarquons la symétrie des courbes par rapport à la première bissectrice des axes, *i.e.* la droite d'équation $y = x$.

3) Dérivabilité

Rappels de Terminale S.

- Une fonction f définie sur I et à valeurs réelles est dite dérivable en un point $x_0 \in I$ si la fonction $h \longmapsto \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ admet une limite finie ℓ quand h tend vers 0. Ce réel ℓ est alors noté $f'(x_0)$ et appelé dérivée de f en x_0.
- L'équation de la tangente à la courbe représentative de f en x_0 est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
- La fonction f est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tous les points de I. On appelle alors fonction dérivée de f, et on note f', la fonction qui à tout $x \in I$ associe $f'(x)$.
- Une fonction dérivable sur I est continue sur I (... et la réciproque est fausse).

Proposition. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors :*

- *αf est dérivable sur I et*
- *$f + g$ est dérivable sur I et*
- *fg est dérivable sur I et*

Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors :

- *$\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I et*
- *$\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et*

Proposition. *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications telles que $f(I) \subset J$. Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur J, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et*

Terminons par les résultats reliant signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction :

Théorème. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.*

- *f est constante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.*
- *f est croissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.*
- *f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.*

Proposition. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et dérivable. Si f' est strictement positive (resp. strictement négative) sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points de I, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante).*

Ces théorèmes ne sont valables que si I est un intervalle.

4) Tableaux de variations

On synthétise l'étude des variations d'une fonction f dans un tableau de variation faisant apparaître :

- le domaine de définition de f (on précise les éventuelles valeurs interdites) et les valeurs où la dérivée change de signe (on précise les éventuelles valeurs de D_f pour lesquelles la fonction n'est pas dérivable),
- le signe de $f'(x)$
- les variations de f symbolisées par des flèches obliques (on convient qu'elles traduisent la continuité et la stricte monotonie sur l'intervalle considéré),
- les extrema et les limites de f

Exemple : *Le tableau*

x	-5		-3		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$		$\Vert$	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	-1		0	$\nearrow$	1

nous apprend que :

III Plan de l'étude d'une fonction

La méthodologie d'étude d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la suivante :

1. On détermine le domaine de définition D_f de la fonction f.
2. On cherche à restreindre le domaine d'étude de f en déterminant des propriété de symétrie (périodicité, parité).
3. On précise les intervalles de D_f sur lesquels f est continue et les intervalles sur lesquels f est dérivable.
4. On calcule f' et on étudie son signe sur chaque intervalle où f est dérivable.
5. On construit le tableau de variations de f, conséquence de l'étude du signe de f'.
6. On étudie les limites aux bords des intervalles de D_f.
7. On détermine des tangentes en des points particuliers. On cherche d'éventuelles asymptotes et branches paraboliques (souvent ce sera précisé dans l'énoncé).
8. On trace $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. Au préalable on place quelques points particuliers (notamment les réels x tels que $f'(x) = 0$), on trace éventuelles tangentes et asymptotes que l'on a déterminées et on place d'autres points intermédiaires pour aider la construction.

IV Fonctions usuelles

Voici un catalogue de (presque) toutes les fonctions usuelles que nous rencontrerons cette année. La plupart des résultats énoncés seront montrés dans les chapitres *Propriétés locales des fonctions : limites et continuité en un point*, *Propriétés globales des fonctions : continuité sur un intervalle* et *Dérivation*

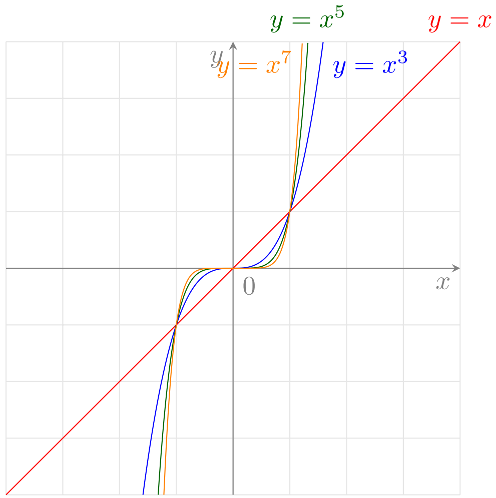
1) Les fonctions puissances d'un nombre entier

Si $n \in \mathbb{Z}$, alors $x \longmapsto x^n$ est appelée fonction puissance $n^{\text{ième}}$.

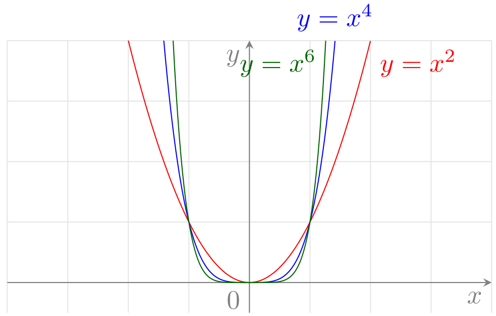
a) Cas où $n \in \mathbb{N}$

Si $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$ et :

- Si n est pair (resp. impair), alors $x \longmapsto x^n$ est paire (resp. impaire).
- Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.
- Elle est continue sur $\mathbb{R}$.
- Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
  - — Si $n = 0$, sa dérivée est la fonction nulle.
  - — Si $n \in \mathbb{N}^*$, sa dérivée est la fonction $x \longmapsto nx^{n-1}$.



CAS OÙ $n = 2k+1$ AVEC $k \in \mathbb{N}$



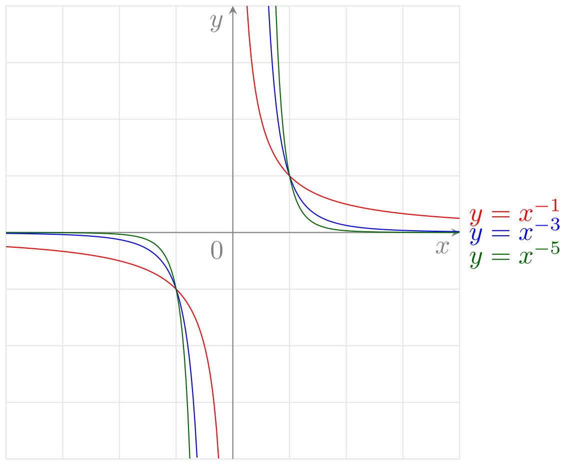
CAS OÙ $n = 2k$ AVEC $k \in \mathbb{N}^*$

b) Cas où $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$

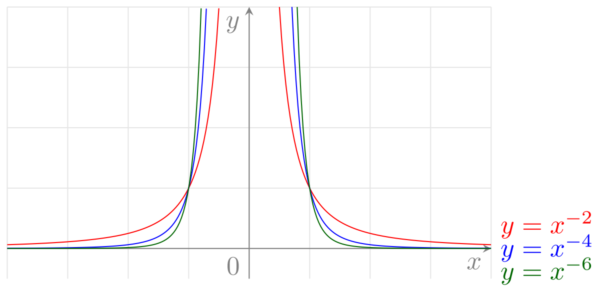
Si $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et :

- Si n est pair (resp. impair), alors elle est paire (resp. impaire) sur $\mathbb{R}^*$.
- Elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = 0$.
- Elle est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est la fonction $x \in \mathbb{R}^* \longmapsto nx^{n-1}$.

Si $n = -1$, on l'appelle fonction inverse.



CAS OÙ $n = 2k+1$ AVEC $k \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$



CAS OÙ $n = 2k$ AVEC $k \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$

2) Les fonctions polynômiales et rationnelles

a) Les fonctions affines

Définition. *Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite affine si il existe deux réels α et β tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \alpha x + \beta.$$

- Si $\beta = 0$, on dit que f est une fonction linéaire.
- Si $f : x \longmapsto \alpha x + \beta$ est affine, alors sa courbe représentative est la droite du plan de coefficient directeur α et d'ordonnée à l'origine β. Si on se donne deux réels x et y distincts quelconques et on a .
- Réciproquement, si (D) est une droite du plan qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, alors (D) est le graphe d'une fonction affine f. On dit que $y = f(x)$ est l'équation de la droite (D).
  - Si on sait que (D) a pour coefficient directeur α et passe par le point A de coordonnées (x_A, y_A), alors .
  - Si on sait que (D) passe par les points A et B de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B), alors

b) Les fonctions polynômiales

Définition. *Une fonction P est dite polynômiale si il existe $p \in \mathbb{N}$ et des réels $a_0, a_1, \ldots, a_p$, avec $a_p \neq 0$, tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k.$$

On dit que p est le degré de P et que a_p est le coefficient dominant de P.

Une fonction polynômiale P est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, si elle est de degré de p et de coefficient dominant a_p, alors elle possède les mêmes limites en $\pm\infty$ que la fonction $x \longmapsto a_p x^p$. $\leadsto$ Exercice.

Nous étudierons ces fonctions en détail dans le chapitre *Polynômes réels ou complexes*. Nous verrons notamment qu'une fonction polynômiale ne s'annule qu'en un nombre fini de réels appelés racines.

c) Les fonctions rationnelles

Définition. *Soient P et Q deux fonctions polynômiales. Notons $\mathcal{R}_Q$ l'ensemble (fini) des racines de Q. La fonction $R : x \longmapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\mathcal{R}_Q$ est dite rationnelle.*

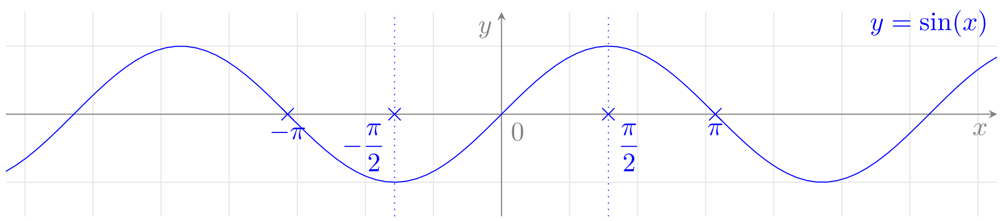
Une fonction rationnelle $R : x \longmapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\mathcal{R}_Q$. Si P est de degré p et Q de degré q, notons a_p et b_q les coefficients dominants (qui sont non nuls par définition du degré) de P et Q. La fonction rationnelle R possède les mêmes limites en $\pm\infty$ que la fonction $x \longmapsto \dfrac{a_p}{b_q} x^{p-q}$. $\leadsto$ Exercice.

3) Les fonctions trigonométriques

Nous verrons plus en détail d'autres propriétés de ces fonctions dans le chapitre *Nombres complexes et trigonométrie*.

a) La fonction sinus

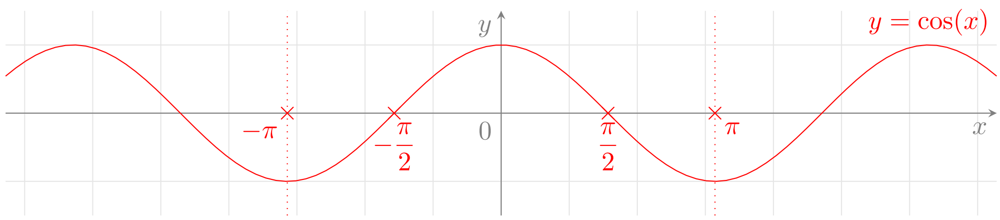
La fonction sinus, notée $\sin$, est définie, continue, dérivable, impaire et 2π-périodique et bornée (par 1) sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Sa dérivée est la fonction $\cos$.



Nous avons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|\sin(x)|\leqslant|x|$.

b) La fonction cosinus

La fonction cosinus, notée $\cos$, est définie, continue, dérivable, paire et 2π-périodique et bornée (par 1) sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement décroissante sur $[0,\pi]$. Sa dérivée est la fonction $x\longmapsto -\sin(x)$.



Nous avons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)-1}{x}=0$.

c) La fonction tangente

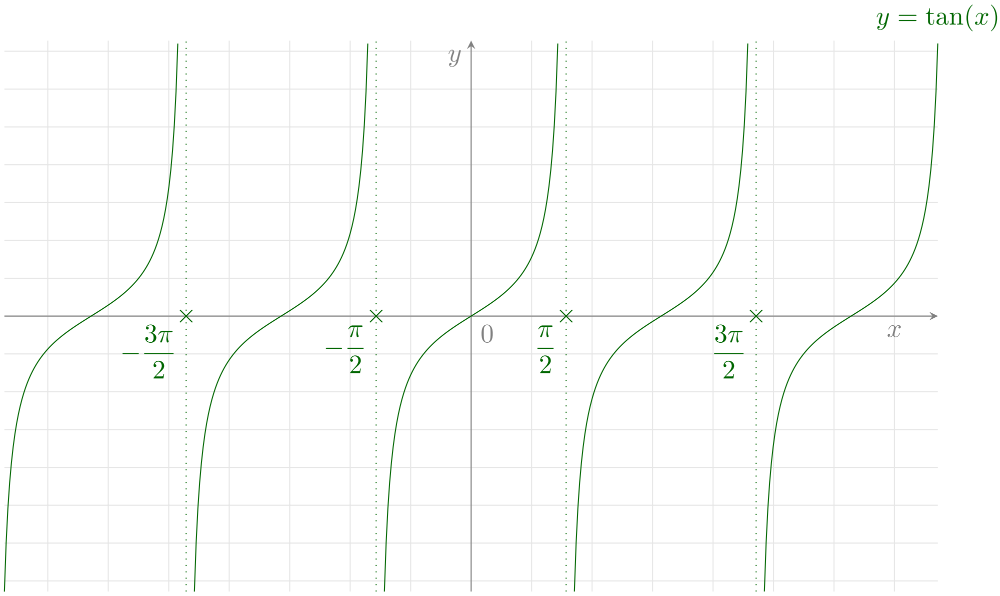
Notons $\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$, l'ensemble des réels congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo π.
La fonction tangente, notée $\tan$, est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$ par

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\left(\tfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)\qquad \tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Nous avons :

- La fonction tangente est impaire et π-périodique sur $\mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$.
- Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, elle strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$.
- $\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{2}+k\pi)^+}\tan(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)^-}\tan(x)=+\infty$.
- Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, elle est continue et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ et

$$\forall x\in\left]-\tfrac{\pi}{2}+k\pi,\tfrac{\pi}{2}+k\pi\right[\qquad \tan'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x).$$



4) Les fonctions exponentielle et logarithme népérien

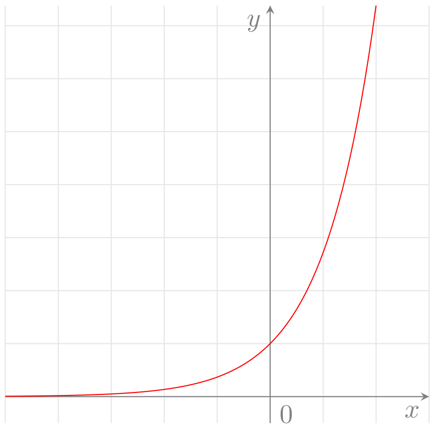
a) La fonction exponentielle

Il existe une unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui est sa propre dérivée et qui vaut 1 en 0 (nous verrons cela en DM). On l'appelle fonction exponentielle et on la note $\exp$ ou $x \longmapsto e^x$. De plus :

- Elle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
- Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
- Elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Pour tous réels x et y, $e^{x+y} = e^x e^y$ et $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.
- Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $e^{nx} = (e^x)^n$.
- Quelques limites à connaître :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$



Les deux premières limites peuvent se résumer par la phrase « l'exponentielle l'emporte sur les puissances » (mais dans une copie on préfèrera le terme de « croissances comparées »). Nous les montrerons dans le chapitre *Dérivation*. La troisième limite est la traduction de la dérivabilité de $\exp$ en 0.

b) La fonction logarithme néperien

Le théorème de la bijection entraîne que la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. On appelle logarithme néperien et on note $\ln$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ qui est la réciproque de l'exponentielle : pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, $y = \exp(x)$ si et seulement si $x = \ln(y)$. De plus

- Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln(1) = 0$. Elle est donc strictement positive (resp. négative) sur $]1, +\infty[$ (resp. $]0, 1[$).
- $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
- Elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus sa dérivée est la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{1}{x}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tous x et y strictement positifs,

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y),$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y),$$

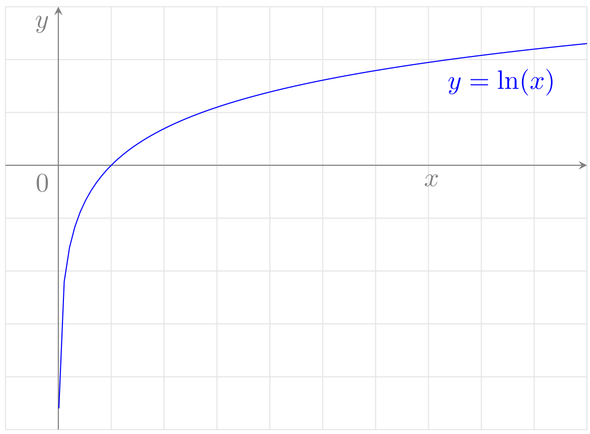
$$\ln(x^n) = n\ln(x).$$

- Quelques limites à connaître :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

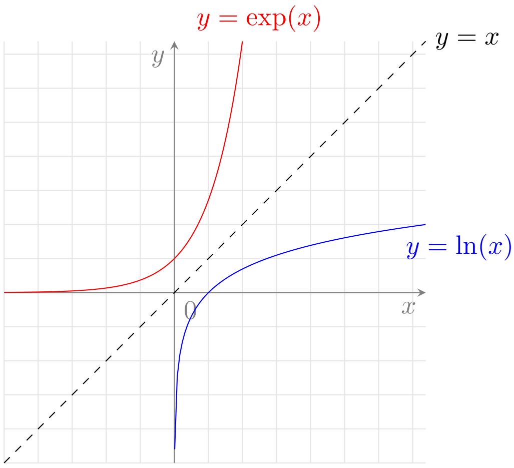
$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$



Les deux premières limites peuvent se résumer par la phrase « les puissances l'emportent sur le logarithme » (mais dans une copie on préfèrera le terme de « croissances comparées »). Nous les montrerons dans le chapitre *Dérivation*. La troisième limite est la traduction de la dérivabilité de $x \longmapsto \ln(1+x)$ en 0.

Illustrons graphiquement le fait que $\exp$ et $\ln$ sont des bijections réciproques :



5) Puissances à exposant réel

a) Définition et propriétés

Soit x un réel strictement positif.

Cela nous permet de généraliser la notion de puissance à un exposant réel :

Définition. *Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.*

Il découle alors des propriétés de l'exponentielle et du logarithme népérien que :

Proposition. *Nous avons, pour tous réels $x > 0$, $y > 0$, α et β,*

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}, \qquad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, \qquad x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}, \qquad \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x) \qquad \textit{et} \qquad (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha.$$

Démonstration.

□

b) Les fonctions puissances d'exposant $\alpha \in \mathbb{R}$

Définition. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle puissance d'exposant α la fonction*

$$x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}.$$

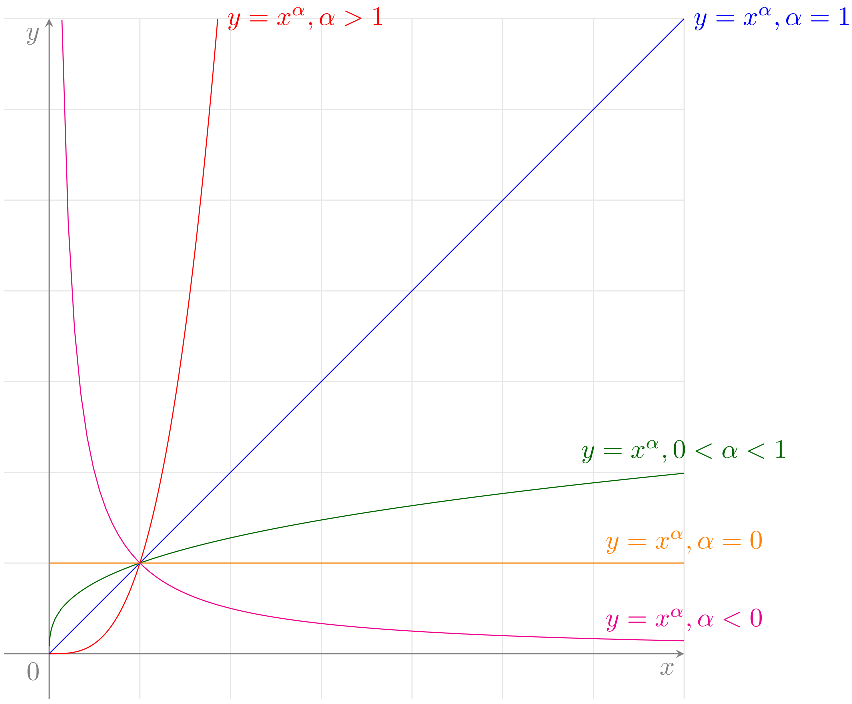
On pose $0^0 = 1$ et, si $\alpha > 0$, on pose $0^\alpha = 0$.

Proposition. *Nous avons :*

- *Si $\alpha \geqslant 0$, alors $x \longmapsto x^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.*
  Si $\alpha < 0$, alors $x \longmapsto x^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- *Si $\alpha \geqslant 1$, alors $x \longmapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est $x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$.*
  Si $\alpha < 1$, alors $x \longmapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est $x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

Démonstration.

$\square$



Remarques :

- Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 dans le cas où la puissance est positive. Seules les puissances entières sont définies également sur $\mathbb{R}_-^*$.
- Si $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$, alors la fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivé est la fonction
- Si $x \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha = \dfrac{p}{n} \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$, alors on a $x^\alpha = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^p = (x^p)^{\frac{1}{n}}$, c'est-à-dire $x^\alpha = \sqrt[n]{x^p} = (\sqrt[n]{x})^p$.

c) Les fonctions exponentielles de base a

Soit $a \in]0, 1[\cup]1, \infty[$. La fonction $x \longmapsto a^x = e^{x \ln(a)}$ est appelée exponentielle de base a. Elle est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $\mathbb{R}$ si $a > 1$ (resp. si $0 < a < 1$). Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto \ln(a)\, a^x$.

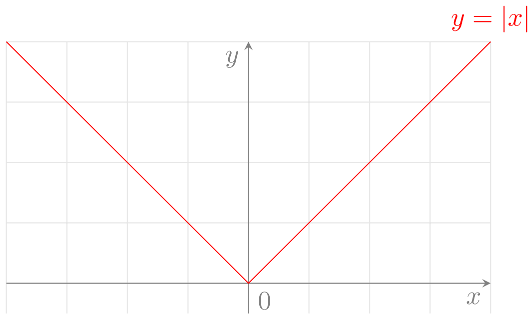
6) Autres fonctions usuelles

a) La fonction valeur absolue

La fonction $x \longmapsto |x|$ est définie, paire et continue sur $\mathbb{R}$. On l'appelle fonction valeur absolue. Elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\lim_{x\to+\infty} |x| = \lim_{x\to-\infty} |x| = +\infty.$$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. sur $\mathbb{R}_-^*$) et sa dérivée est la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. à -1 sur $\mathbb{R}_-^*$). Par contre elle n'est pas dérivable en 0.



b) La fonction partie entière

La fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est définie sur $\mathbb{R}$. On l'appelle fonction partie entière. Elle est croissante sur $\mathbb{R}$ et constante sur chaque intervalle $[k, k+1[$, $k \in \mathbb{Z}$.