III Application à l'étude d'extrema locaux

1) Extremum local et point critique

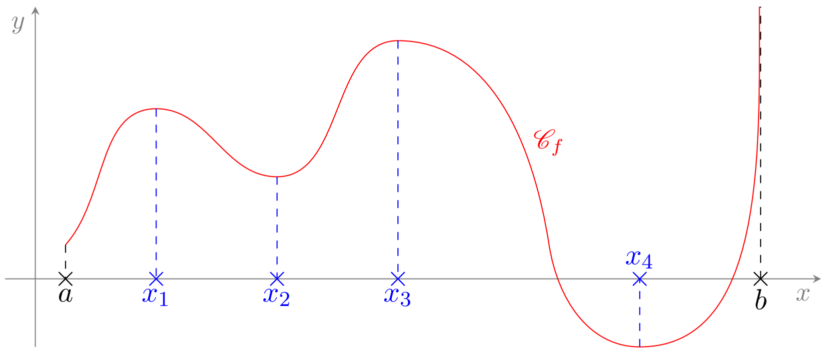
Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Définition (extremum local). *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f admet un maximum (resp. un minimum) local en x_0 si il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $f(x) \leqslant f(x_0)$ (resp. $f(x) \geqslant f(x_0)$). On dit que f admet un extremum local en x_0 si f admet un maximum ou un minimum local en x_0.*

Définition (point critique). *Soient I un intervalle ouvert et f une fonction dérivable sur I et à valeurs réelles. Si $x_0 \in I$ est tel que $f'(x_0) = 0$, alors x_0 est appelé un point critique de f sur I.*

Remarque : Si une fonction admet un maximum (resp. un minimum) en un point x_0, alors on dit aussi qu'il s'agit d'un maximum (resp. un minimum) global. Bien sûr un extremum global est aussi un extremum local.

Exemple :



La fonction f possède deux maxima locaux (en x_1 et x_3) et deux minima locaux (en x_2 et x_4) sur $I =]a, b[$. La fonction f possède un minimum global sur I en x_4 mais elle d'admet pas de maximum global sur I.

Rappelons la condition nécessaire montrée dans le chapitre 13 :

Théorème (condition nécessaire d'extremum local). *Soient I un intervalle ouvert et f une fonction dérivable sur I et à valeurs réelles. Si x_0 est un extremum local de f sur I, alors x_0 est un point critique de f sur I.*

⚠ La réciproque du théorème est fausse.

Par exemple la fonction $f : x \longmapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$. Il s'ensuit que 0 est le seul point critique sur f. Pourtant il est clair que 0 n'est ni un maximum, ni un minimum de f sur $\mathbb{R}$.

⚠ Ce résultat est faux si I n'est pas un intervalle ouvert.

Par exemple la fonction $f : x \in [1, 2] \longmapsto x$ admet un maximum local en 2 sur $I = [1, 2]$ et un minimum local en 1 en I. Pourtant sa dérivée ne s'annule pas sur I.

2) Condition suffisante d'extremum local

Théorème (condition suffisante d'extremum local). *Soient I un intervalle ouvert et f une fonction de classe C^2 sur I et à valeurs réelles. Supposons que x_0 est un point critique de f sur I.*

1. *Si $f''(x_0) > 0$, alors f admet un minimum local sur I en x_0.*
2. *Si $f''(x_0) < 0$, alors f admet un maximum local sur I en x_0.*

DÉMONSTRATION.

$\square$

⚠ Si $f''(x_0) = 0$, alors on ne peut pas conclure.

- *Considérons la fonction* $f : x \longmapsto \sin(x) - x$*. Elle est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}$ *et* $f' = \cos -1$, $f'' = -\sin$. *Par conséquent* 0 *est un point critique de* f *vérifiant* $f''(0) = 0$*. Mais il ne s'agit pas d'un extremum local :* f' *est négative sur* $\mathbb{R}$ *et* $f(0) = 0$ *donc* f *est positive sur* $\mathbb{R}_-$ *et négative sur* $\mathbb{R}_+$.
- *Considérons la fonction* $g : x \longmapsto \sin^2(x) - x^2$*. Elle est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}$ *et, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2\cos(x)\sin(x) - 2x = \sin(2x) - 2x = f(2x)$*. Nous en déduisons que :*
  - g *admet* 0 *pour unique point critique. Ensuite* $g''(0) = 2f'(0) = 2(\cos(0) - 1) = 0$.
  - g' *est positive (resp. négative) sur* $\mathbb{R}_-$ *(resp.* $\mathbb{R}_+$*) et donc* g *admet un unique maximum en* 0.

Exemple : *Étudions les extrema locaux de la fonction* $f : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto x^2 + 4x - 6\ln(|x|)$.