Chapitre 20

Dérivées successives et formules de Taylor

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

I Dérivées successives

1) Définitions

Définition. *Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I et si f' est dérivable sur I, alors on dit que f est deux fois dérivable sur I et la dérivée de f' est appelé la dérivée seconde de f. On la note $f^{(2)}$ ou f''.*

On définit les dérivées successives par récurrence : pour un entier $n \geqslant 2$, on dit que f est n fois dérivable sur I si

- *f est $n-1$ dérivable sur I,*
- *$f^{(n-1)}$, la dérivée $(n-1)^{\text{ième}}$ de f, est dérivable sur I.*

La fonction $(f^{(n-1)})'$ est appelée dérivée $n^{\text{ième}}$ (ou dérivée d'ordre n) de f et notée $f^{(n)}$.

On a $f^{(1)} = f'$ et on pose $f^{(0)} = f$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $D^n(I, \mathbb{R})$ ou $D^n(I)$ l'ensemble des fonctions n fois dérivable sur I.

Pour pouvoir définir $f^{(n+1)}(x_0)$, il faut que la fonction $f^{(n)}$ soit définie au voisinage de x_0.

Définition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est de classe C^n sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I.*

On note $C^n(I, \mathbb{R})$ ou $C^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe C^n sur I.

Remarques :

- Si $n = 0$, alors on retrouve que $C^0(I)$ est l'ensemble des fonctions qui sont 0 fois dérivables et telles que $f = f^{(0)}$ est continue. On peut considérer aussi que $D^0(I, \mathbb{R})$ est l'ensemble $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons les inclusions
$$C^n(I,\mathbb{R}) \subset D^n(I,\mathbb{R}) \subset C^{n-1}(I,\mathbb{R}) \subset \cdots \subset C^1(I,\mathbb{R}) \subset D^1(I,\mathbb{R}) \subset C^0(I,\mathbb{R}).$$

Définition. *On dit que f est de classe C^∞ sur I si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur I, autrement dit si f est infiniment dérivable sur I.*

On note $C^\infty(I, \mathbb{R})$ ou $C^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I.

Remarque : On a $C^\infty(I,\mathbb{R}) = \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(I,\mathbb{R}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} D^n(I,\mathbb{R})$.

Exemples :

- *Les fonctions polynômiales, rationnelles, exponentielles, logarithmes, sinus, cosinus, tangente et Arctangente sont de classe C^∞ sur leur domaine de définition.*
- *Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $f_k : x \longmapsto x^k$ (que l'on peut noter aussi X^k) est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_k^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{k!}{(k-n)!} x^{k-n} & \text{si} \quad n < k, \\ k! & \text{si} \quad n = k, \\ 0 & \text{si} \quad n > k. \end{cases}$$
Cela se montre par récurrence. $\rightsquigarrow$ Exercice.
- *On a vu que la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier mais n'est pas de classe C^1 en 0.*

2) Opérations sur les dérivées successives

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $f \in D^n(I,\mathbb{R})$, $g \in D^n(I,\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors*

1. $f+g \in D^n(I,\mathbb{R})$ *et* $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.
2. $\lambda f \in D^n(I,\mathbb{R})$ *et* $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$.

En particulier $D^n(I,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Démonstration. Par récurrence. $\rightsquigarrow$ Exercice.

Théorème (formule de Leibniz). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $f \in D^n(I,\mathbb{R})$ et $g \in D^n(I,\mathbb{R})$, alors $fg \in D^n(I,\mathbb{R})$ et*

Démonstration. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrons ce théorème par récurrence sur n.

- *Initialisation :* Si f et g sont dérivables sur I, alors on a déjà vu que fg est dérivable sur I et que
$$(fg)^{(1)} = (fg)' = f'g + g'f = f^{(1)}g^{(1-1)} + f^{(0)}g^{(1-0)} = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(1-k)}.$$
Ainsi le théorème est vrai au rang 1.
- *Hérédité :* Supposons que le théorème soit vrai au rang n pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Soit f et g dans $D^{n+1}(I,\mathbb{R})$. Par hypothèse de récurrence $fg \in D^n(I,\mathbb{R})$ et
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$
Toutes les fonctions de cette somme sont dérivables sur I. Par conséquent $fg \in D^{n+1}(I,\mathbb{R})$ et
$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)} = \big((fg)^{(n)}\big)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \big(f^{(k)} g^{(n-k)}\big)' &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \big(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}.\end{aligned}$$
Faisons le changement de variables $j = k+1$ dans la première somme :
$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)} &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} f^{(j)} g^{(n+1-j)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\ &= \binom{n}{n} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} \\ &= \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{0} f^{(0)} g^{(n+1)}\end{aligned}$$
car $\binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n+1}{0} = \binom{n}{0} = 1$. Ainsi le théorème est vrai au rang $n+1$.

D'où le théorème par récurrence. $\square$

Puisque $C^0(I,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et puisque le produit de deux fonctions continues est une fonction continue, nous en déduisons :

Proposition. *Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Si f et g sont des fonctions de classe C^n sur I, alors les fonctions $f+g$, λf et fg sont de classe C^n sur I.*

En particulier $C^n(I,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Proposition. *Si P un polynôme de degré p à coefficients réels, alors P est de classe C^∞ et, pour tout $n > p$, $P^{(n)}$ est le polynôme nul.*

Démonstration.

Exemple :

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur I (resp. de classe C^n, de classe C^∞). Si g ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont n fois dérivables (resp. de classe C^n, de classe C^∞) sur I.*

Démonstration. Par récurrence. $\rightsquigarrow$ Exercice.

Proposition. *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ avec J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$. Supposons que*

- *$f \in D^n(I, \mathbb{R})$ (resp. $C^n(I, \mathbb{R})$, $C^\infty(I, \mathbb{R})$),*
- *$g \in D^n(J, \mathbb{R})$ (resp. $C^n(J, \mathbb{R})$, $C^\infty(J, \mathbb{R})$).*

Alors $g \circ f \in D^n(I, \mathbb{R})$ (resp. $C^n(J, \mathbb{R})$, $C^\infty(J, \mathbb{R})$).

Démonstration. Montrons ce théorème pour $D^n(I, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$. Les autres cas en sont des conséquences.

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $(a, b) \in I^2$. Montrons la proposition par récurrence sur n.

- *Initialisation :* Si f dérivable sur I et g est dérivable sur J, alors on a déjà montré dans le chapitre *Dérivation* que $g \circ f$ est dérivable sur I avec $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$. Ainsi la proposition est vraie au rang 1.
- *Hérédité :* Supposons que la proposition soit vraie au rang n pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Soient $f \in D^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et $g \in D^{n+1}(J, \mathbb{R})$. La fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et nous avons $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$. Puisque $f \in D^n(I, \mathbb{R})$ et $g' \in D^n(J, \mathbb{R})$, l'hypothèse de récurrence entraîne que $g' \circ f \in D^n(I, \mathbb{R})$. Enfin $f' \in D^n(I, \mathbb{R})$ donc $(g \circ f)' \in D^n(I, \mathbb{R})$. Ainsi $g \circ f \in D^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et la proposition est donc vraie au rang $n + 1$.

D'où la proposition par récurrence. □

II Formules de Taylor

Dans toute cette section, n désigne un entier naturel. On adaptera aussi la convention que, pour tout $(a, b) \in I^2$ tel que $a > b$, $[a, b]$ désigne l'intervalle $[b, a]$.

⚠ Mais attention aux bornes des intégrales lorsqu'on utilise la positivité de l'intégrale !

1) Formule de Taylor pour les polynômes

Théorème (formule de Taylor pour les polynômes). *Soit P un polynôme de degré n à coefficient réels. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, nous avons*

DÉMONSTRATION.

Application : utilisons cette formule pour la caractérisation de la multiplicité d'une racine d'un polynôme par ses dérivées successives. Rappelons que, si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $k \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$, alors on dit que a est une racine d'ordre k de P si $(X-a)^k$ divise P et $(X-a)^{k+1}$ ne divise pas P. L'entier k est appelée l'ordre de multiplicité de la racine a.

Théorème. *Soient $P \in \mathbb{R}[X]$, $a \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors a est racine d'ordre k de P si et seulement si*

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0 \qquad \text{et} \qquad P^{(k)}(a) \neq 0.$$

DÉMONSTRATION.

Exemple : *Cherchons si le polynôme $P = X^4 - 5X^3 + 6X^2 + 4X - 8$ admet des racines multiples.*