III Sommes doubles

Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de nombres complexes indexée par une partie finie I de $\mathbb{N}$, alors on dit que la somme $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i$ des éléments de la famille est une somme simple.

1) Notion de somme double

Définition. *On appelle couple d'entiers naturels, la donnée de deux entiers naturels x et y dans cet ordre. On le note (x,y). L'ensemble des couples d'entiers naturels est noté $\mathbb{N}^2$.*

Définition. *Soit A une partie finie de $\mathbb{N}^2$. On appelle famille de nombres réels (resp. complexes) indexée par A la donnée, pour chaque couple d'entiers naturels (i,j) de A, d'un unique nombre réel (resp. complexe) $x_{i,j}$. On la note $(x_{i,j})_{(i,j)\in A}$.*

On note $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} x_{i,j}$ la somme des éléments de la famille. On dit qu'il s'agit d'une somme double.

Exemple : *Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tous i et j dans $[\![1,n]\!]$, notons $x_{ij}=3ij^2$.*

2) Le cas d'un domaine rectangulaire

Supposons que $A=\{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \,|\, m\leqslant i\leqslant n,\ p\leqslant j\leqslant q\}$ avec m, n, p et q des entiers naturels tels que $m\leqslant n$ et $p\leqslant q$.

On note alors $(x_{i,j})_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}}$ au lieu de $(x_{i,j})_{(i,j)\in A}$ et $\displaystyle\sum_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} x_{i,j}$ au lieu de $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} x_{i,j}$.

Si $m=p$ et $q=n$, on note aussi $(x_{i,j})_{p\leqslant i,j\leqslant n}$ pour la famille et $\displaystyle\sum_{p\leqslant i,j\leqslant n} x_{i,j}$ pour la somme.

On peut ranger les éléments de la famille dans un tableau :

$i \backslash j$	p	$p+1$	$\cdots$	$q-1$	q
m	$x_{m,p}$	$x_{m,p+1}$	$\cdots$	$x_{m,q-1}$	$x_{m,q}$
$m+1$	$x_{m+1,p}$	$x_{m+1,p+1}$	$\cdots$	$x_{m+1,q-1}$	$x_{m+1,q}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$x_{n-1,p}$	$x_{n-1,p+1}$	$\cdots$	$x_{n-1,q-1}$	$x_{n-1,q}$
n	$x_{n,p}$	$x_{n,p+1}$	$\cdots$	$x_{n,q-1}$	$x_{n,q}$

Pour sommer les éléments de la famille (c'est-à-dire les éléments du tableau ci-dessus), on peut décider de

- sommer d'abord chaque ligne (on obtient alors $\boxed{}$ pour tout $i\in[\![m,n]\!]$) puis prendre la somme de tous les résultats.
- ou bien sommer d'abord chaque colonne (on obtient alors $\boxed{}$ pour tout $j\in[\![p,q]\!]$) puis prendre la somme de tous les résultats.

Résumons cela :

Théorème (de Fubini). *Nous avons*

$$\sum_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} x_{i,j} = \boxed{}\,.$$

Remarque : Le nombre de termes intervenant dans cette somme est égal au nombre de termes dans le tableau. Il y en a $(n-m+1)(q-p+1)$ puisqu'il s'agit d'un tableau à $n-m+1$ lignes et $q-p+1$ colonnes.

Exemples :

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous i et j dans $[\![1, n]\!]$, notons $x_{ij} = 3ij^2$.*

- *(développement/factorisation) Si $x_m, \dots, x_n, y_p, \dots, y_q$ sont des nombres complexes, alors*

$$\sum_{\substack{m \leqslant i \leqslant n \\ p \leqslant j \leqslant q}} x_i y_j =$$

En particulier, si $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ sont des complexes, alors $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i y_j =$

Ne faites pas dire à Fubini ce qu'il n'a pas dit : l'égalité suivante est complètement fausse !

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

(il suffit de remarquer que $x_1x_2 + y_1y_2 \neq x_1x_2 + +x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2 = (x_1+x_2) \times (y_1+y_2)$ en général).

3) Le cas d'un domaine triangulaire

a) Somme des termes sur-diagonaux

Supposons que $A = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \,|\, p \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$ avec p et n des entiers naturels tels que $p \leqslant n$. On note alors $(x_{i,j})_{p \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$ au lieu de $(x_{i,j})_{(i,j)\in A}$ et

$$\sum_{p \leqslant i \leqslant j \leqslant n} x_{i,j} \qquad \text{au lieu de} \qquad \sum_{(i,j)\in A} x_{i,j}.$$

On peut ranger les éléments de la famille dans un tableau :

$i \backslash j$	p	$p+1$	$\cdots$	k	$\cdots$	$n-1$	n
p	$x_{p,p}$	$x_{p,p+1}$	$\cdots$	$x_{p,k}$	$\cdots$	$x_{p,n-1}$	$x_{p,n}$
$p+1$		$x_{p+1,p+1}$	$\cdots$	$x_{p+1,k}$	$\cdots$	$x_{p+1,n-1}$	$x_{p+1,n}$
$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k				$x_{k,k}$	$\cdots$	$x_{k,n-1}$	$x_{k,n}$
$\vdots$					$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$						$x_{n-1,n-1}$	$x_{n-1,n}$
n							$x_{n,n}$

Pour sommer les éléments de la famille (c'est-à-dire les éléments du tableau ci-dessus), on peut décider de

- sommer d'abord chaque ligne (on obtient alors $\boxed{}$ pour tout $i \in [\![p,n]\!]$) puis prendre la somme de tous les résultats.
- ou bien sommer d'abord chaque colonne (on obtient alors $\boxed{}$ pour tout $j \in [\![p,n]\!]$) puis prendre la somme de tous les résultats.

Résumons cela :

Théorème (de Fubini). *Nous avons*

$$\sum_{p \leqslant i \leqslant j \leqslant n} x_{i,j} = \boxed{}.$$

Remarque : Le nombre de terme intervenant dans cette somme est égale au nombre de termes dans le tableau. Supposons que $p = 1$. Il y a alors n termes sur la diagonale et n^2 cases dans le tableau en tout. Le nombre de termes dans le tableau n'étant pas sur la diagonale est donc $\dfrac{n^2 - n}{2}$. Il y a donc en tout $n + \dfrac{n^2 - n}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$ termes dans la somme.

b) Somme des termes sur-diagonaux stricts

Supposons que $A = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \,|\, p \leqslant i < j \leqslant n\}$ avec p et n des entiers naturels tels que $p < n$. On note alors $(x_{i,j})_{p \leqslant i < j \leqslant n}$ au lieu de $(x_{i,j})_{(i,j) \in A}$ et

$$\sum_{p \leqslant i < j \leqslant n} x_{i,j} \qquad \text{au lieu de} \qquad \sum_{(i,j) \in A} x_{i,j}.$$

On peut ranger les éléments de la famille dans un tableau :

$i \backslash j$	p	$p+1$	$p+2$	$\cdots$	k	$k+1$	$\cdots$	$n-1$	n
p		$x_{p,p+1}$	$x_{p,p+2}$	$\cdots$	$x_{p,k}$	$x_{p,k+1}$	$\cdots$	$x_{p,n-1}$	$x_{p,n}$
$p+1$			$x_{p+1,p+2}$	$\cdots$	$x_{p+1,k}$	$x_{p+1,k+1}$	$\cdots$	$x_{p+1,n-1}$	$x_{p+1,n}$
$\vdots$				$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k-1$					$x_{k-1,k}$	$x_{k-1,k+1}$	$\cdots$	$x_{k-1,n-1}$	$x_{k-1,n}$
k						$x_{k,k+1}$	$\cdots$	$x_{k,n-1}$	$x_{k,n}$
$\vdots$							$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-2$								$x_{n-2,n-1}$	$x_{n-2,n}$
$n-1$									$x_{n-1,n}$
n									

Pour sommer les éléments de la famille (c'est-à-dire les éléments du tableau ci-dessus), on peut décider de

- sommer d'abord chaque ligne (on obtient alors $\boxed{}$ pour tout $i \in [\![p,n-1]\!]$) puis prendre la somme de tous les résultats.
- ou bien sommer d'abord chaque colonne (on obtient alors $\boxed{}$ pour tout $j \in [\![p+1,n]\!]$) puis prendre la somme de tous les résultats.

Résumons cela :

Théorème (de Fubini). *Nous avons*

$$\sum_{p \leqslant i < j \leqslant n} x_{i,j} = \boxed{}.$$

Remarque : Le nombre de terme intervenant dans cette somme est égale au nombre de termes dans le tableau. Supposons que $p=1$. Il y a alors n termes sur la diagonale et n^2 cases dans le tableau en tout. Le nombre de termes dans le tableau n'étant pas sur la diagonale est donc $\dfrac{n^2-n}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Exemples :

- *Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Calculons $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} ij$ de deux manières.*

- *(développement du carré d'une somme) Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des nombres complexes, alors*