Chapitre 2

Propriétés des nombres réels

I Les ensembles de nombres

1) Existence admise des ensembles de nombres

Nous admettons l'existence et les principales propriétés des ensembles de nombres suivants :

- L'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ des entiers naturels.
- L'ensemble $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ des entiers relatifs.
- L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Nous avons les inclusions strictes[1] suivantes : $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

Ces ensembles contiennent 0 et on note $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ et $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

L'ensemble $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ des réels qui ne sont pas rationnels et appelé ensemble des nombres irrationnels.

2) Opérations dans $\mathbb{R}$

a) Addition et multiplication dans $\mathbb{R}$

Les deux propositions suivantes sont admises :

Proposition. *L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une opération[2], appelée addition, notée $+$, et qui vérifie :*

- *Pour tous réels x et y, $x + y = y + x$ (commutativité).*
- *Pour tous réels x, y et z, $x + (y + z) = (x + y) + z$ (associativité).*
- *Pour tout réel x, $0 + x = x + 0 = x$ (0 est l'élément neutre pour l'addition).*
- *Tout réel x admet un opposé, noté $-x$: $x + (-x) = (-x) + x = 0$.*

Pour tous réels x et y, on note $x - y = x + (-y)$ la soustraction de x par y.

Proposition. *L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une opération appelée multiplication, notée $\cdot$ (ou $\times$), et qui vérifie :*

- *Pour tous réels x et y, $x \cdot y = y \cdot x$ (commutativité).*
- *Pour tous réels x, y et z, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (associativité).*
- *Pour tout réel x, $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ (1 est l'élément neutre pour la multiplication).*
- *Tout réel x non nul admet un inverse, noté x^{-1} ou $\dfrac{1}{x}$: $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.*
- *Pour tout réels x, y et z, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ ($\cdot$ est distributive par rapport à $+$).*

Pour tous réels x et y, on note plutôt xy au lieu de $x \cdot y$. Si $y \neq 0$, on note $\dfrac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$ la division de x par y.

Remarques :

- Les propriétés suivantes découlent immédiatement des propriétés énoncées ci-dessus :
  - Si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, alors $nx = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ termes}}$. $\rightsquigarrow$ Exercice.
  - Pour tous réels x et y, $xy = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $y = 0$.

    En effet, si $z \in \mathbb{R}$, alors $0z = (0 + 0)z = 0z + 0z$ et donc $0 = 0z - 0z = 0z$. Réciproquement si x et y sont deux réels tels que $xy = 0$, alors ou bien $x = 0$, ou bien $x \neq 0$ et alors $y = x^{-1}xy = x^{-1}0 = 0$.
  - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(-1)x = -x$.

    En effet, $0 = x0 = x(1 + (-1)) = 1x + (-1)x = x + (-1)x$ donc $-x = (-1)x$.

1. On dit que l'ensemble E est strictement inclus dans l'ensemble F, si $E \subset F$ et $E \neq F$. On note alors $E \subsetneq F$.
2. Définir une opération sur un ensemble E consiste à associer à toute paire d'éléments de E un autre élément de E. Par exemple l'addition (resp. la multiplication) sur $\mathbb{R}$ associe à deux réels x et y leur somme (resp. leur produit), notée $x + y$ (noté $x \cdot y$).

— Soient x, y, z et t réels. Nous avons :
  - ⋆ $x(y - z) = xy - xz$,
  - ⋆ $(x + t)(y + z) = xy + xz + ty + tz$,
  - ⋆ Si $x + y = x + z$, alors $y = z$.
  - ⋆ Si $xy = xz$, alors $\boxed{\qquad\qquad}$ ⇝ EXERCICE.

- Stabilité des ensembles de nombres :
  — L'ensemble $\mathbb{N}$ est stable pour l'addition et la multiplication, *i.e.* pour tous x et y dans $\mathbb{N}$, $x + y \in \mathbb{N}$ et $xy \in \mathbb{N}$. Par contre $\mathbb{N}$ n'est pas stable par la soustraction et $\mathbb{N}^*$ n'est pas stable par l'inversion.

  Par exemple $2 - 3 = -1 \notin \mathbb{N}$ *et* $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$. *On a même* $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

  — L'ensemble $\mathbb{Z}$ est stable pour l'addition, la soustraction et la multiplication, *i.e.* pour tous x et y dans $\mathbb{Z}$, $x + y \in \mathbb{Z}$, $x - y \in \mathbb{Z}$ et $xy \in \mathbb{Z}$. Par contre $\mathbb{Z}^*$ n'est pas stable par l'inversion.

  — L'ensemble $\mathbb{Q}$ est stable pour l'addition, la soustraction et la multiplication, *i.e.* pour tous x et y dans $\mathbb{Q}$, $x + y \in \mathbb{Q}$, $x - y \in \mathbb{Q}$ et $xy \in \mathbb{Q}$.

  — L'ensemble $\mathbb{Q}^*$ est également stable par inversion, *i.e.* pour tout $x \in \mathbb{Q}^*$, $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}^*$.

b) Le cas des entiers

Définition (parité d'un entier). *Un nombre entier n est dit pair si $\frac{n}{2}$ est un entier et impair sinon.*

Proposition. *Un nombre entier n est pair si et seulement si il existe un entier p tel que $n = 2p$.*
Un nombre entier n est impair si et seulement si il existe un entier p tel que $n = 2p + 1$.

DÉMONSTRATION. Admis (cela découle du théorème de la division euclidienne qui n'est pas explicitement au programme mais dont une preuve est proposée en exercice dans le TD n° 2). □

c) Le cas des rationnels

La notation sous forme de fraction de l'inverse d'un réel non nul nous permet d'écrire $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$.

Si $q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$, on dit que a est le numérateur de q et b le dénominateur de q. L'écriture d'un rationnel n'est pas unique : si $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$, alors

$$\forall c \in \mathbb{Z}^*, \qquad \frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}.$$

Si $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ n'admettent pas de diviseur commun [1] autre que 1 et -1 dans $\mathbb{Z}$, alors on dit que le rationnel $\frac{a}{b}$ est écrit sous forme irréductible.

Proposition (opérations dans $\mathbb{Q}$). *Soient a, c des entiers et b, d des entiers non nuls. Nous avons*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \boxed{\qquad\quad}, \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \boxed{\qquad\quad}, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \boxed{\quad} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{b}{d}\right)^{-1} = \boxed{\;}.$$

d) Puissances entières

Définition (puissance entière). *Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on appelle puissance $n^{\text{ième}}$ de x le réel $x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ termes}}$.*
On pose $x^0 = 1$.

Si $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$ et $x \neq 0$, on définit $x^n = \underbrace{\frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \times \cdots \times \frac{1}{x}}_{-n \text{ termes}}$.

Remarques :

- Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $x^1 = x$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x^{n+1} = x^n \cdot x = x \cdot x^n$ (valable aussi si $x = 0$ et $n \in \mathbb{N}$).
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x^n = 0$ si et seulement si $x = 0$. ⇝ EXERCICE.
- Nous avons $0^0 = 1$.
- Si $x \neq 0$ alors, pour passer de x^3 à x^2 on divise par x, puis pour passer de x^2 à x^1 on divise encore par x, donc pour passer de x^1 à x^0, il est naturel de vouloir diviser par x et on obtient alors $x^0 = 1$. Par conséquent la convention $x^0 = 1$ est naturelle.

1. On dit que $d \in \mathbb{Z}^*$ est un diviseur commun des entiers m et n si $\frac{m}{d} \in \mathbb{Z}$ et $\frac{n}{d} \in \mathbb{Z}$.

Proposition. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$*

Remarque : En particulier, si $n \in \mathbb{Z}$, alors et .

Proposition. *Soient n et p deux entiers et x et y deux réels non nuls. Nous avons :*

- $x^{-n} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n = \dfrac{1}{x^n}$,
- $(xy)^n = x^n y^n$,
- $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$,
- $x^{n+p} = x^n x^p$,
- $x^{n-p} = \dfrac{x^n}{x^p}$,
- $(x^n)^p = x^{np}$.

$\rightsquigarrow$ Exercice.

Proposition (identités remarquables). *Soient x et y deux réels. Nous avons*

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2, \qquad x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2, \qquad x^2 - y^2 = (x+y)(x-y).$$

Quelques identités très remarquables : si x est un réel, alors

3) Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

a) Définitions et propriétés

La proposition suivante est admise :

Proposition. *L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre notée $\leqslant$ qui vérifie :*

- *Pour tout réel a, $a \leqslant a$ (réflexivité).*
- *Si a et b sont des réels tels que $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$, alors $a = b$ (antisymétrie).*
- *Si a, b et c sont des réels tels que $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$, alors $a \leqslant c$ (transitivité).*
- *Pour tous réels a et b, $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$ (ordre total).*
- *Si a, b et c sont des réels tels que $a \leqslant b$, alors $a + c \leqslant b + c$ (compatibilité avec l'addition).*
- *Si a, b et c sont des réels tels que $a \leqslant b$ et $0 \leqslant c$, alors $ac \leqslant bc$ (compatibilité avec la multiplication).*

Définition. *Soient x et y des réels. On dit que*

- *x est inférieur (ou égal) à y lorsque $x \leqslant y$.*
- *x est supérieur (ou égal) à y, et on note $x \geqslant y$, lorsque $y \leqslant x$.*
- *x est strictement inférieur à y, et on note $x < y$, lorsque $x \leqslant y$ et $y \neq x$.*
- *x est strictement supérieur à y, et on note $x > y$, lorsque $x \geqslant y$ et $y \neq x$.*

Remarques :

- En mathématiques française, lorsqu'on dit « x est inférieur (resp. supérieur) à y », il est toujours sous-entendu « x est inférieur (resp. supérieur) ou égal à y » .
- Si $x < y$, alors $x \leqslant y$ (mais la réciproque est fausse).
- Si $x > y$, alors $x \geqslant y$ (mais la réciproque est fausse).
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant x$ et $x \geqslant x$.

Définition. *Un réel x est dit :*

- *positif si $x \geqslant 0$,*
- *négatif si $x \leqslant 0$,*
- *strictement positif si $x > 0$,*
- *strictement négatif si $x < 0$.*

On en déduit les règles suivantes :

Proposition. *Soient a, b, c et d des réels.*

- *Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a + c \ \square\ b + d$.*
  En particulier la somme de deux nombres positifs (resp. négatifs) est positive (resp. négative).
- *Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant 0$, alors $ac \ \square\ bc$.*
  En particulier $a \leqslant b$ si et seulement si $-a \ \square\ -b$.
- *On a $ab \geqslant 0$ (resp. $ab \leqslant 0$) si et seulement si $\boxed{}$*
  (resp. $\boxed{}$).
- *Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$, alors $ac \ \square\ bd$.*
- *Si $(a > 0$ et $b > 0)$ ou $(a < 0$ et $b < 0)$, alors $a \leqslant b$ si et seulement si $\dfrac{1}{a} \ \square\ \dfrac{1}{b}$.*

Soustraire, multiplier ou diviser des inégalités membre à membre n'est pas permis

Par contre on peut additionner des inégalités membre à membre (si elles sont dans le même sens bien sûr) et on peut aussi les multiplier dans le cas où tous les termes sont positifs.

On en déduit aussi les règles suivantes concernant les inégalités strictes :

Proposition. *Soient a, b, c et d des réels.*

- *Si $(a < b$ et $b \leqslant c)$ ou $(a \leqslant b$ et $b < c)$, alors $a \ \square\ c$.*
- *Si $a < b$ et $c \leqslant d$, alors $a + c \ \square\ b + d$.*
- *Si $a < b$ et $0 < c$ (resp. $c < 0$), alors $ac \ \square\ bc$ (resp. $ac \ \square\ bc$).*
  En particulier, $a < b$ si et seulement si $-a \ \square\ -b$.
- *$ab > 0$ si et seulement si $\boxed{}$.*
- *$ab < 0$ si et seulement si $\boxed{}$.*
- *$a > 0$ (resp. $a < 0$) si et seulement si $\dfrac{1}{a} \ \square\ 0$ (resp. $\dfrac{1}{a} \ \square\ 0$).*
- *Si $(a > 0$ et $b > 0)$ ou $(a < 0$ et $b < 0)$, alors $a < b$ si et seulement si $\dfrac{1}{a} \ \square\ \dfrac{1}{b}$.*

Par récurrence, on montre que :

Proposition. *Soient x et y deux réels.*

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*
  - *Si n est pair et $0 \leqslant x < y$, alors $x^n \ \square\ y^n$.*
  - *Si n est pair et $x < y \leqslant 0$, alors $x^n \ \square\ y^n$.*
  - *Si n est impair et $x < y$, alors $x^n \ \square\ y^n$.*
- *Soit $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$.*
  - *Si n est pair et $0 < x < y$, alors $x^n \ \square\ y^n$.*
  - *Si n est pair et $x < y < 0$, alors $x^n \ \square\ y^n$.*
  - *Si n est impair et $0 < x < y$, alors $x^n \ \square\ y^n$.*
  - *Si n est impair et $x < y < 0$, alors $x^n \ \square\ y^n$.*

$\rightsquigarrow$ Exercice.

Élever à une puissance entière les termes d'une inégalité n'est pas permis s'ils sont de signe contraire (à part si la puissance en question est un entier naturel impair).

b) Parties de $\mathbb{R}$ définies par une relation d'ordre

Définition (intervalles). *Pour tous réels a et b tels que $a \leqslant b$, nous notons*

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x \leqslant b\}$ *(intervalle fermé borné ou segment),*

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leqslant b\}$ *si $a < b$ (intervalle semi-ouvert borné),*

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x < b\}$ *si $a < b$ (intervalle semi-ouvert borné),*

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$ *si $a < b$ (intervalle ouvert borné),*

$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leqslant a\}$ *(intervalle fermé non borné),*

$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < a\}$ *(intervalle ouvert non borné),*

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geqslant a\}$ *(intervalle fermé non borné),*

$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > a\}$ *(intervalle ouvert non borné),*

$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ *(intervalle ouvert et fermé non borné).*

Les réels a et b sont appelés les extrémités de l'intervalle.

Remarques :

- Pour tout réel a, l'intervalle $[a, a]$ est le singleton $\{a\}$.
- On parle aussi d'intervalle semi-fermé pour un intervalle semi-ouvert.
- Pour tout réel a, les intervalle semi-ouverts $]a, a]$, $[a, a[$ et $]a, a[$ sont vides.
- Si $a > b$, alors l'intervalle $[a, b]$ (resp. $]a, b]$, $[a, b[$ et $]a, b[$) désigne souvent, par abus de notation, l'intervalle $[b, a]$ (resp. $]b, a]$, $[b, a[$ et $]b, a[$). Mais attention, certains ouvrages prennent la convention que ces intervalles sont vides.

Définition. *On note*

- $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ *l'ensemble des réels positifs.*
- $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ *l'ensemble des réels strictement positifs.*
- $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$ *l'ensemble des réels négatifs.*
- $\mathbb{R}_-^* =]-\infty, 0[$ *l'ensemble des réels strictement négatifs.*

Définition. *Si p et n sont deux entiers tels que $p \leqslant n$, alors on note $[\![p, n]\!] = \{p, p+1, \ldots, n-1, n\}$ l'ensemble des entiers compris (au sens large) entre p et n.*

Ne pas confondre les notations $[p, n]$ et $[\![p, n]\!]$. Ce dernier n'est PAS un intervalle.

c) Valeur absolue d'un réel

Définition. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la valeur absolue $|x|$ de x par*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0, \\ -x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Exemples : $|-3| = 3$, $|-\pi| = \pi$, $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$.

Remarque : Pour tout réel x, on a

De plus

Proposition. *Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Nous avons*

$$\begin{array}{lclcl} |x| \leqslant a & \iff & \qquad\qquad & \iff & x \in \qquad\qquad, \\ |x| < a & \iff & & \iff & x \in \qquad\qquad, \\ |x| \geqslant a & \iff & & \iff & x \in \qquad\qquad, \\ |x| > a & \iff & & \iff & x \in \qquad\qquad. \end{array}$$

Proposition. *Soient x et y deux réels. Nous avons :*

- $|xy| = |x| \cdot |y|$,
- *Si $y \neq 0$, alors* $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.
- *Si $x \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors* $|x^n| = |x|^n$.

Proposition. *Soient x et y deux réels. Nous avons :*

$$x^2 = y^2 \iff \boxed{} \iff \boxed{}.$$

De plus $x^2 \leqslant y^2$ si et seulement si $\boxed{}$.

Proposition (inégalité triangulaire). *Pour tous réels x et y, on a*

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

Démonstration.

□

Remarque : Bien sûr, pour tous réels x et y, on a également $|x-y| \leqslant |x| + |y|$.

Corollaire (inégalité triangulaire renversée). *Pour tous réels x et y, on a*

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|.$$

Démonstration.

□

II Parties majorées, parties minorées de $\mathbb{R}$

1) Majorants et minorants

Définition. *Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit x un réel.*

- *On dit que x est un majorant de A si, pour tout $a \in A$, $a \leqslant x$.*
  Si A admet un majorant, alors on dit qu'elle est majorée.
- *On dit que x est un minorant de A si, pour tout $a \in A$, $a \geqslant x$.*
  Si A admet un minorant, alors on dit qu'elle est minorée.
- *Si A est minorée et majorée, alors on dit qu'elle est bornée.*

Exemples :

Proposition. *Une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement si il existe $x \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $a \in A$, $|a| \leqslant x$.*

Démonstration.

□

2) Maximum et minimum

Proposition/Définition. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

- *On dit que le réel x est un maximum (ou un plus grand élément) de A si $x \in A$ et, pour tout $a \in A$, $a \leqslant x$. Si A admet un maximum x, alors il est unique et on l'appelle le maximum de A. Dans ce cas, on note $x = \max(A)$.*
- *On dit que le réel x est un minimum (ou un plus petit élément) de A si $x \in A$ et, pour tout $a \in A$, $a \geqslant x$. Si A admet un minimum x, alors il est unique et on l'appelle le minimum de A. Dans ce cas, on note $x = \min(A)$.*

Démonstration.

□

Remarques :

- Si A est une partie non majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$, alors elle n'admet pas de maximum (resp. minimum).
- Notons $-A = \{-x \mid x \in A\} \subset \mathbb{R}$. La partie A admet un maximum (resp. un minimum) si et seulement si $-A$ admet un minimum (resp. un maximum).

Exemples :

Les assertions du théorème suivant sont admises et peuvent être considérées comme des axiomes.

Théorème.

- *Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum.*
- *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un maximum.*
- *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un minimum.*

3) Borne supérieure et borne inférieure

On voit bien dans les exemples précédents que la partie B n'admet pas de minimum mais que le réel 7 est le plus grand des minorants. De même le réel 4π n'est pas un maximum de C et pourtant il est le plus petit des majorants. Cela nous pousse à introduire les notions de bornes supérieurs et inférieures.

Définition. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

- *Si A est majorée et si l'ensemble des majorants de A admet un minimum, alors celui-ci est appelé borne supérieure de A et noté $\sup(A)$.*
- *Si A est minorée et si l'ensemble des minorants de A admet un maximum, alors celui-ci est appelé borne inférieure de A et noté $\inf(A)$.*

Exemples :

Le théorème suivant est admis et peut être considéré comme un axiome.

Théorème (Théorème de la borne supérieure).

- *Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.*
- *Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.*

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée. Comment traduire, à l'aide de quantificateurs, le fait qu'un majorant M de A est le plus petit des majorants de A ?

On en déduit que :

Théorème (Caractérisation de la borne supérieure). *Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.*

$$M = \sup(A) \iff \begin{cases} \boxed{} & (M \text{ est un majorant de } A) \\ \boxed{} & (M \text{ est le plus petit des majorants de } A) \end{cases}$$

De façon analogue, on a :

Théorème (Caractérisation de la borne inférieure). *Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$.*

$$m = \inf(A) \iff \begin{cases} \boxed{} & (m \text{ est un minorant de } A) \\ \boxed{} & (m \text{ est le plus grand des minorants de } A) \end{cases}$$

Corollaire. *Si une partie A de $\mathbb{R}$ admet un maximum (resp. un minimum), alors il s'agit aussi de la borne supérieure (resp. inférieure) de A.*

$\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Voici une autre conséquence de ces théorème :

Théorème (Caractérisation des intervalles). *Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tous réels x et y de I tels que $x \leqslant y$, le segment $[x, y]$ est inclus dans I.*

DÉMONSTRATION. Le sens direct est immédiat : cette propriété est vraie pour chacun des 9 types d'intervalles. La réciproque fait l'objet de l'exercice 19 de la feuille de TD n° 2. $\square$

Autrement dit, un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ caractérisée par le fait que, quels que soient les éléments x et y de I, tout nombre réel compris entre x et y est encore dans I. Dans un intervalle, il n'y a pas de « trou ».

4) Partie entière d'un réel

Proposition/Définition (partie entière d'un réel). *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$. L'entier n est appelée la partie entière de x et notée $\lfloor x \rfloor$.*

Exemples :

DÉMONSTRATION.

□

Remarque : Retenons les deux inégalités fondamentales :

- Si $x \in \mathbb{R}$, alors
- Si $x \in \mathbb{R}$, alors

III Racines d'un réel positif

1) Racine $n^{\text{ième}}$ d'un réel positif

Proposition/Définition. *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Pour tout réel positif x, il existe un unique réel positif y tel que $y^n = x$. Ce réel est appelé racine $n^{\text{ième}}$ de x et noté $x^{1/n}$ ou $\sqrt[n]{x}$.*

DÉMONSTRATION. Nous montrerons l'existence et l'unicité dans le chapitre 4. □

Exemples :

Remarques :

- Si $n = 2$ et x est un réel positif, alors on note simplement $\sqrt{x}$ la racine carrée de x.
- Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a $\sqrt[n]{0} = 0$ et $\sqrt[n]{1} = 1$.
- Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
  - Si x est un réel positif, alors
  - Si x est un réel quelconque et si n est pair, alors

Proposition. *Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient x et y deux réels positifs. Nous avons :*

1.
2.
3.
4.

DÉMONSTRATION. 1. D'après les propriétés sur les puissances, nous avons $xy = (\sqrt[n]{x})^n(\sqrt[n]{y})^n = (\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y})^n$. Par unicité de la racine $n^{\text{ième}}$ du réel positif xy, nous obtenons que $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$.

2. Analogue au point précédent.
3. On a
$$\left((\sqrt[n]{x})^p\right)^n = (\sqrt[n]{x})^{pn} = (\sqrt[n]{x})^{np} = \left((\sqrt[n]{x})^n\right)^p = x^p = (\sqrt[n]{x^p})^n.$$
Par unicité de la racine $n^{\text{ième}}$ du réel positif x^p, nous obtenons que $(\sqrt[n]{x})^p = \sqrt[n]{x^p}$.
4. On a $\left(\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}}\right)^{np} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}}\right)^n\right)^p = \left(\sqrt[p]{x}\right)^p = x$. Par unicité de la racine $(np)^{\text{ième}}$ du réel positif x, nous obtenons que $\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[np]{x}$. On montre de même que $\sqrt[p]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[np]{x}$. □

Remarque : Un grand classique à connaître : si x et y sont des réels strictement positifs,

L'expression $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ s'appelle la quantité conjuguée de $\sqrt{x}-\sqrt{y}$.

2) Résolution des équations du second degré à coefficients réels

Soient a, b, c et x des réels, avec $a \neq 0$. Notons $\Delta = b^2-4ac$. On a

Définition. *Le nombre $\Delta = b^2-4ac$ est appelé discriminant du trinôme ax^2+bx+c. L'expression $a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$ est appelée forme canonique de ax^2+bx+c.*

Proposition.

- *Si $\Delta = 0$, alors $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$ avec*
- *Si $\Delta > 0$, alors $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ avec*

DÉMONSTRATION.

Nous déduisons aussi de la démonstration précédente les deux théorèmes suivants :

Théorème. *Considérons l'équation $(E)\ :\ ax^2+bx+c=0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.*
- *Si $\Delta = 0$, alors (E) admet x_0 pour unique solution.*
- *Si $\Delta > 0$, alors (E) admet deux solutions : x_1 et x_2.*
- *Si $\Delta < 0$, alors (E) n'admet pas de solutions.*

Corollaire.

- *Si $\Delta > 0$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, ax^2+bx+c a le signe de $\begin{cases} a & \text{si} \quad x \in]-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[\\ -a & \text{si} \quad x \in [x_1, x_2] \end{cases}$*
- *Si $\Delta < 0$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, ax^2+bx+c a le signe de a et est non nul.*
- *Si $\Delta = 0$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, ax^2+bx+c a le signe de a et est égal à 0 si et seulement si $x = \dfrac{-b}{2a}$.*