Guide pratique du calcul de sommes

- La variable i dans les sommes $\sum_{i=p}^{n} x_i$ ou $\sum_{i\in I} x_i$ est muette (on peut la remplacer par n'importe quelle variable non déjà introduite... le plus souvent j, k, ℓ, p). Elle n'existe qu'à l'intérieur de la somme si bien que, entre autres :
  - Elle ne peut pas figurer dans le résultat final.
  - On ne doit surtout pas l'introduire avant (cela reviendrait à la fixer... or elle varie dans la somme).
- On commence par utiliser la linéarité pour se ramener à une *combinaison linéaire* de sommes usuelles (c'est-à-dire une somme de sommes usuelles, multipliées éventuellement par une constante) :

  Par exemple

$$\sum_{k=0}^{n}\left(5\left(\frac{3}{4}\right)^k+4k\right)=5\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k+4\sum_{k=0}^{n}k=5\,\frac{1-(3/4)^{n+1}}{1-3/4}+2n(n+1)=20\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)+2n(n+1).$$

  On utilise des parenthèses pour éviter des ambiguïtés :

  Par exemple $\sum_{i=0}^{n} 2j+1$ *est elle égale à* $\left(\sum_{i=0}^{n} 2j\right)+1=n^2+n+1$ *ou à* $\sum_{i=0}^{n}(2j+1)=\sum_{i=0}^{n}2j+\sum_{i=0}^{n}1=(n+1)^2$ *?*
- On n'oublie pas que $1=x^0$ (pratique pour les sommes géométriques).
- **Toutes les sommes usuelles du cours commencent à 0.** Lorsqu'on est en présence d'une somme usuelle qui ne commence pas par 0, on ajoute (et on retranche forcément) les termes manquant puis utilise la relation de Chasles.

  Par exemple $\sum_{k=p}^{n}k^2=\sum_{k=p}^{n}k^2+\sum_{k=0}^{p-1}k^2-\sum_{k=0}^{p-1}k^2=\sum_{k=0}^{n}k^2-\sum_{k=0}^{p-1}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(p-1)p(2p-1)}{6}.$

  Bien sûr on ne change pas une somme en ajoutant ou retranchant un terme nul. Ainsi

$$\sum_{k=1}^{n}k=\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2},\qquad \sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\qquad \sum_{k=1}^{n}k^3=\sum_{k=0}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

  Par contre, si $x\neq 1$, $\sum_{k=1}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}-1$.
- Attention à toujours vérifier que x est différent de 1 avant d'appliquer la formule ci-dessus.
- On se rappelle que, si $x\in\mathbb{R}_+$ et $p\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, alors $\sqrt[p]{x^k}=(\sqrt[p]{x})^k$... pratique pour les sommes géométriques.
- Il y a $n-p+1$ termes dans la somme $\sum_{k=p}^{n}x_k$ et non pas $n-p$.
- On ne reste pas bloqué devant une somme de termes ne dépendant pas de l'indice...

  Par exemple $\sum_{k=p}^{n}2=\underbrace{2+\cdots+2}_{(n-p+1)\text{ fois}}=2(n-p+1)$ *ou encore* $\sum_{k=1}^{n}n^3=\underbrace{n^3+\cdots+n^3}_{n\text{ fois}}=n^4.$
- On ne reste pas non plus bloqué devant une somme présentant le terme $(-1)^{n+1}$ alors qu'on voudrait $(-1)^{n-1}$ (ou le contraire)... c'est la même chose. De même on pense à

$$(-1)^{n-2}=-(-1)^{n-1}=(-1)^n=\frac{1}{(-1)^n}=-(-1)^{n+1}=(-1)^{n+2},\qquad \text{etc.}$$

- Si on n'a aucune idée, rien ne nous empêche d'écrire, au brouillon, la somme avec des pointillés pour mieux l'appréhender.

  Par exemple $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k=-1+2-3+4-5+6+\cdots-(2n+1)+2n$ *et on peut conjecturer alors qu'elle est égale à* n.
  Un raisonnement par récurrence nous permet alors de montrer que c'est bien le cas.
- On ne peut faire que des changements d'indice du type $k=q-i$ ou $k=q+i$ avec q un entier fixé.
  Surtout pas $k=2i$ par exemple (car $i=k/2$ n'est plus nécessairement un entier).
  Le changement doit être bijectif (cf. chapitre 7).

- La méthode pour faire un changement d'indice est toujours la même :
  - On commencer par choisir le nouvel indice (généralement le choix s'impose de lui-même).
  - On exprime chaque indice par rapport à l'autre.
    Par exemple, si on pose $k = n + 1 - i$, alors $i = n + 1 - k$.
  - On remplace l'ancien indice par le nouveau partout dans la somme (et on ne surtout touche pas ce qui ne dépend pas de i bien sûr... comme n par exemple).
  - On change les bornes (dans le cas d'un renversement d'indice, on prend soin de mettre la plus petite borne en dessous de la somme et la plus grande au dessus).
    Par exemple, avec le changement d'indices ci-dessus, si $i = 0$ alors $k = n + 1$, et si $i = n$ alors $k = 1$. On a alors
$$\sum_{i=0}^{n}(n+1-i)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 \qquad \textit{et non} \qquad \sum_{k=n+1}^{1} k^2.$$
- Quand on a tout essayé et qu'on a pas reconnu de sommes usuelles, on peut essayer de se ramener à une somme télescopique :
  - Si $x_k = u_{k+1} - u_k$ pour tout $k \in [\![p, n]\!]$, alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} x_k = u_{n+1} - u_p$.
  - Si $x_k = u_{k-1} - u_k$ pour tout $k \in [\![p, n]\!]$, alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} x_k = u_{p-1} - u_n$.
- Lorsqu'on est face à une somme contenant un coefficient binomial, on cherche systématiquement à appliquer la formule du binôme de Newton.
  - Dans un premier temps, on utilise les formules sur les coefficients binomiaux de telle sorte qu'il n'y ait plus que le coefficient binomial et des termes du type x^{q+i} ou x^{q-i} (où i est l'indice de la somme, q un entier et x un réel ne dépendant pas de i)
    Par exemple, si $n \geqslant 3$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} k\binom{n}{k}(-5)^{k-3} = \sum_{k=2}^{n-1} n\binom{n-1}{k-1}(-5)^{k-3} = n\sum_{k=2}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}(-5)^{k-3}$.
  - On effectue un changement d'indice pour que le terme dans la partie inférieure du coefficient binomial ne contienne plus que l'indice de la somme.
    Par exemple $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}(-5)^{k-3} = \sum_{i=1}^{n-2}\binom{n-1}{i}(-5)^{i-2}$, *via le changement d'indice $i = k - 1$.*
  - On met des termes en facteurs pour faire apparaitre un terme du type $x^i y^{n-i}$ (où n est l'entier dans la partie supérieure du coefficient binomial et i l'indice de la somme) sans oublier l'astuce suivante : $1 = 1^i = 1^{n-i}$.
    Par exemple $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-2}\binom{n-1}{i}(-5)^{i-2} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{n-2}\binom{n-1}{i}(-5)^i 1^{n-1-i}$.
  - On utilise la relation de Chasles pour que la somme commence à 0 et se termine au même entier que celui figurant dans partie supérieure du coefficient binomial.
    Par exemple $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-2}\binom{n-1}{i}(-5)^i 1^{n-1-i} = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(-5)^i 1^{n-1-i} - 1 - (-5)^{n-1}$, *puisque* $\displaystyle\binom{n-1}{0} = \binom{n-1}{n-1} = 1$.
  - Enfin on applique la formule du binôme de Newton :
    Par exemple $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(-5)^i 1^{n-1-i} = (-5+1)^{n-1} = (-4)^{n-1}$.
- Avant d'appliquer une formule, on vérifie qu'elle est valable pour tous les indices de la somme.
  Par exemple, quel sens a la deuxième somme dans $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} n\binom{n-1}{k-1}$ *? Ici il suffit de faire démarrer la somme à 1 (possible car le premier terme est nul) et le problème est réglé.*

  Plus généralement on peut utiliser la relation de Chasles lorsqu'une formule change selon l'indice de la somme :
  Par exemple $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\min(k,n) = \sum_{k=0}^{n}\min(k,n) + \sum_{k=n+1}^{2n}\min(k,n) = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=n+1}^{2n} n = \frac{n(n+1)}{2} + n^2$.
- Lorsqu'on est face à un produit, on peut commencer par essayer de l'exprimer en fonction de factorielles. On peut aussi tenter de repérer un produit télescopique. Mais généralement on se ramène à une somme en passant au logarithme, SI TOUS LES TERMES SONT STRICTEMENT POSITIFS :
$$\ln\left(\prod_{k=p}^{n} x_k\right) = \sum_{k=p}^{n}\ln(x_k)$$
  puis on passe à l'exponentielle à la fin du calcul.