Chapitre 17

Matrices

Soient n et p deux entiers strictement positifs. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Ensemble de matrices

Définition (Matrice). *Une matrice à n lignes et p colonnes (ou de taille $n \times p$) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une application* $\begin{array}{cccc} A & : & [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & (i,j) & \longmapsto & a_{ij} \end{array}$*, notée $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ ou $(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ ou encore sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{i,j}$ est appelé le terme (ou le coefficient) de A d'indice (i,j).

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$.

Remarques :

- Quand il n'y a pas de confusion sur l'espace dans lequel évoluent les indices, on notera simplement $A = (a_{ij})_{i,j}$.
- Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note parfois $(M)_{ij}$ son coefficient d'ordre $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.
- Deux matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ sont égales si elles sont égales en tant qu'application, c'est-à-dire si
  - elles ont même taille : $n = m$ et $p = q$,
  - elles ont les mêmes coefficients : pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{i,j} = b_{i,j}$.

Définition. *Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

- *Si $n = 1$, alors on dit que A est une matrice ligne (ou un vecteur ligne). Si $p = 1$, alors on dit que A est une matrice colonne (ou un vecteur colonne).*
- *Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la matrice ligne $L_i = (a_{i1} \dots a_{ip})$ est appelée la $i^{\text{ième}}$ ligne de A.*
- *Pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, la matrice colonne $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ est appelée la $j^{\text{ième}}$ colonne de A.*
- *On note $\mathrm{O}_{n,p}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls.*
- *Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on note $\mathrm{E}_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient d'indice (i,j) qui est égal à 1. Cette matrice est appelée matrice élémentaire d'indice (i,j) dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*

Remarque : On note souvent

- $A = (a_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ une matrice ligne à p colonnes au lieu de $(a_{1,j})_{1\leqslant j\leqslant p}$.
- $A = (a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une matrice colonne à n lignes au lieu de $(a_{i,1})_{1\leqslant i\leqslant n}$.
- 0 au lieu de $\mathrm{O}_{n,p}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

II Opérations sur les matrices

1) Opérations algébriques dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition (somme de matrices). *Soient $A = (a_{ij})_{i,j}$ et $B = (b_{ij})_{i,j}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la somme de A et B, et on note $A + B$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le coefficient d'indice $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ est $a_{ij} + b_{ij}$.*

Autrement dit $A + B = (a_{ij} + b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.

⚠ L'addition de deux matrices ayant des tailles différentes n'a pas de sens.

Définition (multiplication par un scalaire). *Soient $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit le produit de A par le scalaire λ, et on note λA, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le coefficient d'indice $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ est λa_{ij}.*

Autrement dit $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.

Exemple : *Dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$,*

$$2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 0.5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -8 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{}$$

Proposition. *Soient A, B et C dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On a :*

1. *$A + B = B + A$ (l'addition est commutative dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$).*
2. *$A + (B + C) = (A + B) + C$ (l'addition est associative dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$).*
3. *$A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$ ($0_{n,p}$ est l'élément neutre de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$).*
4. *$A + (-A) = (-A) + A = 0_{n,p}$ (tout élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ admet un opposé).*
5. *$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda A$.*
6. *$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.*
7. *$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.*
8. *$1 \cdot A = A$.*

DÉMONSTRATION. ⇝ EXERCICE.

Remarque : On pourrait se demander l'intérêt de la proposition précédente qui semble totalement évidente. En fait toutes ces propriétés sont évidentes pour les nombres réels que l'on a l'habitude de manipuler depuis des années. Cependant, lorsqu'on définit l'addition et la multiplication par un scalaire sur un nouvel ensemble, il convient de vérifier que ces propriétés naturelles (héritées des nombres réels) sont toujours vérifiées. C'est donc le cas pour l'ensemble des matrices et on a vu cette année que c'était aussi le cas pour les nombres complexes, pour les polynômes, pour les suites et pour les fonctions à valeurs réelles. On dit que ces ensembles sont des espaces vectoriels. Ce sera l'objet du prochain chapitre.

Proposition. *Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, notons $E_{i,j}$ la matrice élémentaire d'indice (i,j) dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors* $\boxed{}$ *.*

DÉMONSTRATION.

□

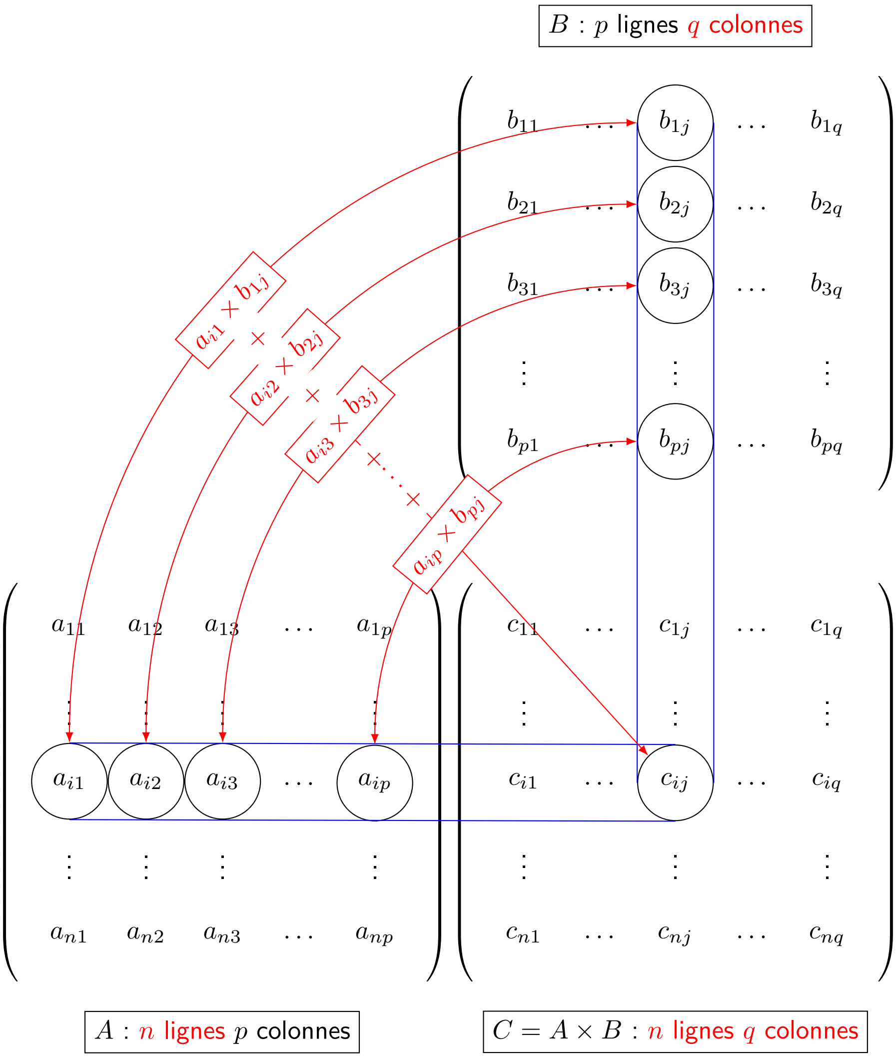
2) Produit matriciel

a) Définition et premières propriétés

Définition (produit de matrices). *Soient $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ où n,p,q sont des entiers strictement positifs. On appelle produit de A et B, et on note AB, la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ dont le coefficient d'indice $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$ est* $\boxed{}$ *.*

⚠ On multiplie une matrice de taille $n \times p$ par une matrice de taille $p \times q$ et on obtient une matrice de taille $n \times q$. La multiplication d'une matrice A par une matrice B dont le nombre de lignes diffère du nombre de colonnes de A n'a pas de sens.

On peut présenter le produit matriciel de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sous la forme suivante (qui prend de la place mais facilite les calculs de chaque coefficient de AB).



Exemple : *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -3 \\ -2 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 2 & 6 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition (associativité). *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Alors $(AB)C = A(BC)$. On note alors simplement ABC ce produit.*

Démonstration. Les matrices $(AB)C$ et $A(BC)$ appartiennent toutes les deux à $\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$.
Soient $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,r]\!]$,

$$((AB)C)_{ij} =$$

et

$$(A(BC))_{ij} =$$

Ainsi $(AB)C$ et $A(BC)$ ont les même coefficients. D'où leur égalité. $\square$

Le produit matriciel n'est bien sûr pas commutatif en général : les produits AB et BA n'ont de sens que si $n = p = q$. Nous verrons à la section suivante que, même si $n = p = q$, l'égalité $AB = BA$ est fausse en général.

Proposition. *Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, $(C, D) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Nous avons :*

1. $(A + B)C = AC + BC$ 2. $A(C + D) = AC + AD$ 3. $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$.

Démonstration.

1. Les matrices $(A+B)C$ et $AC+BC$ appartiennent toutes les deux à $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!]$,
$$((A + B)C)_{ij} = \sum_{k=1}^{p}(A + B)_{ik}\, c_{kj} = \sum_{k=1}^{p}(a_{ik} + b_{ik})\, c_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, c_{kj} + \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, c_{kj}$$
et $(AC + BC)_{ij} = (AC)_{ij} + (BC)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, c_{kj} + \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, c_{kj}$. Ainsi $(A + B)C$ et $AC + BC$ ont les mêmes coefficients. D'où leur égalité.
2. Démonstration analogue à celle du point 1.
3. Les matrices $(\lambda A)B$ et $\lambda(AB)$ appartiennent toutes les deux à $\mathcal{M}_{n,q}$. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!]$,
$$((\lambda A)B)_{ij} = \sum_{k=1}^{p}(\lambda A)_{ik}\, b_{kj} = \sum_{k=1}^{p}(\lambda a_{ik})\, b_{kj} = \lambda \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj} = \lambda(AB)_{i,j} = (\lambda(AB))_{i,j}.$$
Ainsi $(\lambda A)B$ et $\lambda(AB)$ ont les même coefficients. D'où leur égalité. On montre que $A(\lambda B) = \lambda(AB)$ de façon analogue. $\square$

Le produit de deux matrices non nuls peut être nul (on dit alors que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas intègre).

b) Produit d'une matrice par un vecteur colonne

Très souvent on multiplie une matrice par une matrice colonne. Retenons ce cas particulier :

Proposition (produit par un vecteur colonne).
Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors
$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{p} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} a_{nj}x_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Proposition. *Soient $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ Notons $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de B. Alors, pour tout $k \in [\![1, q]\!]$, la $k^{\text{ième}}$ colonne de AB est égale à AC_k.*

Démonstration. $\rightsquigarrow$ Exercice.

c) Lien entre matrice et systèmes linéaires

Proposition/Définition (liens avec les matrices). *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$ et*

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

un système linéaire de n équations à p inconnues où, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$ et $b_i \in \mathbb{K}$. Posons

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}).$$

La matrice A est appelée la matrice associée au système (S). Nous avons alors :

- *$(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n$ est solution du système (S) si et seulement si $AX = B$.*
- *$(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n$ est solution du système homogène (S_0) si et seulement si $AX = 0$ (où 0 désigne ici O_{n1}, la matrice à n lignes et 1 colonne dont tous les coefficients sont nuls).*

Exemple :

Le système $\begin{cases} \quad\; y - z + t = 1 \\ 3x + 2y + z - 9t = 1 \\ x + y \quad\;\; - 3t = -2 \\ x + y - z \quad\;\; = 2 \end{cases}$ *se réécrit* $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -9 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}.$

3) Transposée d'une matrice

Définition (transposée d'une matrice). *Soient $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la transposée de A, et on note ${}^tA$, la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dont le coefficient d'indice $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$ est a_{ji}.*

Exemple : *Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$, alors ${}^tA =$*

Proposition. *Soient $A = (a_{ij})_{i,j}$ et $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Nous avons*

$$1.\ {}^t({}^tA) = A \qquad 2.\ {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB \qquad 3.\ {}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA.$$

Démonstration. $\rightsquigarrow$ Exercice.

Proposition. *Si $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors ${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$.*

Démonstration.

III Matrices carrées

1) Définitions et exemples

Définition (Matrices carrées). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si A est une matrice à n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$, alors on dit que A est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

On note simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On note O_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficient sont nuls.

La matrice $\mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *est appelée matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Exemples : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1+2i \\ 0 & 3i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $\qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ \pi & 8 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Remarque : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, alors AB et BA sont toujours bien définis et sont encore des matrices carrées d'ordre n. Les propriétés déjà montrées sur les matrices nous permettent d'affirmer que le produit matriciel dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est associatif et distributif par rapport à l'addition.

⚠ $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas commutatif pour le produit matriciel dès que $n \geqslant 2$.

Définition. *On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent si $AB = BA$.*

Remarque : Les matrices O_n et I_n commutent avec toutes les matrices : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{I}_n A = A\mathrm{I}_n = A$ et $\mathrm{O}_n A = A\mathrm{O}_n = \mathrm{O}_n$.

Définition (Matrices carrées remarquables). *Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite*

- *triangulaire supérieure si $a_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i > j$.*
- *triangulaire inférieure si $a_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i < j$.*
- *diagonale si $a_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$,*
- *symétrique si ${}^t\!A = A$, c'est-à-dire $a_{j,i} = a_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.*
- *antisymétrique si ${}^t\!A = -A$, c'est-à-dire $a_{j,i} = -a_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.*

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices carrées d'ordre n et à coefficients dans $\mathbb{K}$ qui sont diagonales (resp. triangulaires supérieurs, triangulaires inférieures, symétriques et antisymétriques).

Remarques :

- Une matrice carrée antisymétrique A d'ordre n vérifie $a_{i,i} = 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.
- Si (S) est un système linéaire, alors il est triangulaire si et seulement si sa matrice associée est une matrice carrée triangulaire supérieure.

Exemples : $\begin{pmatrix} 0 & 1-i & -6 & -2 \\ -1+i & 0 & -i & -3 \\ 6 & i & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \boxed{}$, $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & -1 & 7 \\ 3 & -1 & -4 & \sqrt{2} \\ -2 & 7 & \sqrt{2} & 5 \end{pmatrix} \in \boxed{}$,

$$\begin{pmatrix} 2i-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \boxed{}, \quad \begin{pmatrix} 3i & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+7i & 2 & 0 \\ 4 & 1 & i & -3 \end{pmatrix} \in \boxed{}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \boxed{}.$$

Définition. *Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, alors on note*

$$\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}).$$

Remarque : Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\mathrm{I}_n = \mathrm{Diag}(1, \dots, 1)$.

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Si $\alpha \in \mathbb{K}$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$, alors $\alpha D_1 + D_2 = \mathrm{Diag}(\alpha\lambda_1 + \mu_1, \dots, \alpha\lambda_n + \mu_n)$ et $D_1 D_2 = D_2 D_1 = \mathrm{Diag}(\lambda_1\mu_1, \dots, \lambda_n\mu_n)$.*
2. *Si $\alpha \in \mathbb{K}$, $T_1 \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $T_2 \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ alors $\alpha T_1 + T_2 \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $T_1 T_2 \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.*

Démonstration. $\rightsquigarrow$ Exercice.

2) Puissances de matrices carrées

Ce paragraphe et le suivant anticipent légèrement le programme du second semestre.

Définition (puissances d'une matrice carrée). *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $A^0 = \mathrm{I}_n$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $A^p = \underbrace{A \cdots A}_{p \text{ fois}}$.*

Remarque : On a $A^1 = A$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^{p+1} = A^p A = A A^p$.

Proposition. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, alors*

$$A^k A^\ell = A^{k+\ell} = A^\ell A^k \qquad \text{et} \qquad (A^k)^\ell = A^{k\ell} = (A^\ell)^k.$$

Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec A alors $(AB)^k = A^k B^k = B^k A^k$ et $A^k B^\ell = B^\ell A^k$.

Démonstration. $\rightsquigarrow$ Exercice.

Proposition. *Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $k \in \mathbb{N}$, alors $\big(\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\big)^k = \mathrm{Diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$.*

Démonstration. $\rightsquigarrow$ Exercice.

Exemple : *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrons, pour tout $k \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$, $J_n^k = n^{k-1} J_n$.*

Proposition (binôme de Newton). *Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui **commutent**. Alors*

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad (A+B)^p =$$

Démonstration. Montrons la première formule par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.

- *Initialisation :* Nous avons $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} A^k B^{1-k} = B + A$ donc la formule est vrai au rang 1.
- *Hérédité :* Supposons que la formule soit vraie pour un certain rang $p \in \mathbb{N}^*$. Alors
$$\begin{aligned}(A+B)^{p+1} = (A+B)\left(\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^kB^{p-k}\right) &= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}AA^kB^{p-k} + \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}BA^kB^{p-k}\\ &= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^{k+1}B^{p-k} + \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^kB^{p-k+1},\end{aligned}$$
puisque A **et** B **commutent**. Faisons le changement de variable $j = k+1$ dans la première somme. Nous obtenons
$$\begin{aligned}(A+B)^{p+1} &= \sum_{j=1}^{p+1}\binom{p}{j-1}A^jB^{p+1-j} + \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^kB^{p-k+1}\\ &= B^{p+1} + \sum_{k=1}^{p}\left(\binom{p}{k-1} + \binom{p}{k}\right)A^kB^{p-k+1} + A^{p+1}\\ &= B^{p+1} + \sum_{k=1}^{p}\binom{p+1}{k}A^kB^{p-k+1} + A^{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1}\binom{p+1}{k}A^kB^{p+1-k}.\end{aligned}$$
Ainsi la formule est vraie au rang $p+1$ □

D'où le résultat par récurrence. La deuxième formule est alors automatique puisque, l'addition dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ étant commutative, les matrices A et B jouent un rôle symétrique dans le terme $(A+B)^p$.

Exemples :

- *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Calculons A^p lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

- *Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Considérons la matrice $A_n = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*