Chapitre 16

Systèmes linéaires

I Définitions et exemples

Définition. *Soient n et p des entiers strictement positifs. Un système linéaire de n équations à p inconnues est la donnée d'un système*

$$(S)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{cases}$$

où, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$ et $b_i \in \mathbb{K}$

- *$x_1, \dots, x_p$ sont appelées les inconnues de (S).*
- *Les scalaires a_{ij}, $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ sont appelées les coefficients de (S).*
- *Le n-uplet $(b_1, \dots, b_n)$ est appelé le second membre de (S).*

Définition.

- *Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note L_i la $i^{\text{ème}}$ ligne du système (S), c'est-à-dire*

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ip}x_p = b_i,$$

  et on l'appelle $i^{\text{ème}}$ équation du système.
- *Si $(b_1, \dots, b_n) = (0, \dots, 0)$ alors le système (S) est dit homogène.*
- *Le système homogène associé à (S) est le système obtenu en remplaçant $(b_1, \dots, b_n)$ par $(0, \dots, 0)$. On le note (S_0).*
- *Un p-uplet $(s_1, \dots, s_p)$ est dit solution de (S) si les n égalités obtenues en remplaçant $(x_1, \dots, x_p)$ par $(s_1, \dots, s_p)$ sont vérifiées.*
- *Deux systèmes sont dit équivalents s'ils ont le même ensemble de solution.*
- *Le système est dit compatible s'il existe au moins une solution.*
- *Le système est dit impossible ou incompatible s'il n'admet aucune solution.*
- *Le système est dit de Cramer si $n = p$ et s'il admet une unique solution.*

Exemple : *Considérons le système*

$$(S)\quad \begin{cases} x & + & 4y & + & 5z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & 4z & = & 10 \\ 2x & + & 3y & + & 3z & = & 5 \\ 4x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'un système de quatre équations à trois inconnues : x, y et z. Le système homogène associé à (S) est

$$(S_0)\quad \begin{cases} x & + & 4y & + & 5z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & 4z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & 3z & = & 0 \\ 4x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{cases}$$

et son second membre est le vecteur $(0, 10, 5, 0)$. On vérifie que $(1, 6, -5)$ est solution du système : il est donc compatible (on peut montrer qu'il s'agit de la seule solution).

Interprétation géométrique.

- Lorsque $p = 2$, résoudre un système revient à déterminer les points d'intersection de n droites du plan.
- Lorsque $p = 3$, résoudre un système revient à déterminer les points d'intersection de n plans de l'espace.

II Résolution de systèmes linéaires échelonnés

Nous allons voir dans cette section que certains types de systèmes linéaires sont faciles à résoudre.

Soit (S) un système à $n \in \mathbb{N}^*$ équations et $p \in \mathbb{N}^*$ inconnues.

Définition. *On dit que le système (S) est échelonné si*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \qquad \big(i > j \quad \Rightarrow \quad a_{ij} = 0\big).$$

1) Résolution d'un système linéaire triangulaire

Définition. *On dit que le système (S) est triangulaire s'il est échelonné et si $n = p$.*

Si (S) est triangulaire, alors il a la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1i}x_i & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2i}x_i & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & a_{ii}x_i & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ & & & & & & & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Supposons que tous les termes diagonaux sont non nuls : pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $a_{ii} \neq 0$.

La $n^{\text{ième}}$ ligne entraîne alors que $x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$. On substitue ensuite x_n par sa valeur dans la $(n-1)^{\text{ième}}$ ligne, ce qui nous permet d'obtenir la valeur de x_{n-1}. On remonte successivement dans les lignes et on calcule tour à tour les valeurs de x_{n-2}, ..., x_2 et enfin x_1. On en déduit le théorème suivant :

Théorème. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et (S) un système à n équations et n inconnues. Supposons que (S) est triangulaire et que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $a_{ii} \neq 0$. Alors (S) admet une unique solution. Autrement (S) est un système de Cramer.*

Exemple : *Considérons le système suivant :*

$$(S) \quad \begin{cases} 5x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & 3y & + & 4z & = & -6 \\ & & & - & 2z & = & 3 \end{cases}$$

Il s'agit d'un système sous forme triangulaire avec des coefficients diagonaux non nuls. On obtient donc $z = \dfrac{-3}{2}$, puis $y = \dfrac{-6-4z}{3} = 0$ puis enfin $x = \dfrac{1-y+z}{5} = -\dfrac{1}{10}$. Le système admet donc $\left(-\dfrac{1}{10}, 0, \dfrac{-3}{2}\right)$ pour unique solution. Il s'agit d'un système de Cramer.

Si l'un des coefficients diagonaux est nul, alors on ne peut pas conclure en général : il se peut qu'il admette aucune solution ou bien une infinité.

En effet, modifions le système précédent.

— *Le système*

$$(S') \quad \begin{cases} 5x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & 3y & + & 4z & = & -6 \\ & & & & 0 & = & 3 \end{cases}$$

n'admet pas de solutions car la condition $0 = 3$ est clairement fausse.

— *Dans le système*

$$(S'') \quad \begin{cases} 5x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & & & 4z & = & -6 \\ & & & - & 2z & = & 3 \end{cases}$$

les deux dernières lignes entraînent toutes les deux que $z = -3/2$. Ainsi

$$(S'') \iff \begin{cases} 5x & + & y & & = & -\dfrac{1}{2} \\ & & & z & = & -\dfrac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} y & = & -\dfrac{1}{2} + 5x \\ z & = & -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Par conséquent l'ensemble des solutions de (S) est $\{(0,-1/2,-3/2) + x(1,5,0) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ (il s'agit de la droite de l'espace passant par le point $(0,-1/2,-3/2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (1,5,0)$). Il y en a une infinité.

2) Résolution d'un système linéaire échelonné (cas où $n < p$)

Regardons le cas où $n < p$ et considérons un système échelonné (S) de la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1i}x_i & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
 & & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2i}x_i & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
 & & & & \ddots & & & & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & a_{ii}x_i & + & \cdots & + & a_{in}x_n & + & \cdots & + & a_{ip}x_p & = & b_i \\
 & & & & & & & & \ddots & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & a_{nn}x_n & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n
\end{array}\right.$$

Supposons encore que tous les termes diagonaux sont non nuls : pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{ii} \neq 0$.

On dit alors que :

- x_1, ..., x_n sont les inconnues principales du système.
- x_{n+1}, ..., x_p sont les inconnues auxiliaires du système.

On place les inconnues auxiliaires dans le membre de droite pour faire apparaitre un système triangulaire :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1i}x_i & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 & - & \displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} a_{1k}x_k \\
 & & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2i}x_i & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 & - & \displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} a_{2k}x_k \\
 & & & & \ddots & & & & & & & \vdots & & & \\
 & & & & & & a_{ii}x_i & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i & - & \displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} a_{ik}x_k \\
 & & & & & & & & \ddots & & & \vdots & & & \\
 & & & & & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n & - & \displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} a_{nk}x_k
\end{array}\right.$$

Par remontée successives (cf. le cas triangulaire), on calcule les valeurs de $x_1, \ldots, x_n$ en fonctions des inconnues auxiliaires. Pour chaque choix de valeurs des inconnues auxiliaires (il y a une infinité de choix), il y a une unique solution au système. Nous en déduisons qu'il y a une infinité de solution.

Théorème. *Soit (S) un système à $n \in \mathbb{N}^*$ équations et $p > n$ inconnues. Supposons que (S) est échelonné et que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{ii} \neq 0$. Alors (S) admet une infinité de solutions.*

Exemple : *Considérons le système suivant :*

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 3y & + & 5z & = & 4 \\ & & y & - & 2z & = & -1 \end{array}\right.$$

Il est échelonné et les termes diagonaux sont non nuls. On décide que z soit l'inconnue auxiliaire et on obtient

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccccc} x & - & 3y & = & 4 - 5z \\ & & y & = & -1 + 2z \end{array}\right.$$

Ce système est désormais sous forme triangulaire avec des coefficients diagonaux non nuls. On sait le résoudre : on a $y = -1 + 2z$ puis $x = 4 - 5z + 3y = 4 - 5z - 3 + 6z = 1 + z$. Par conséquent l'ensemble des solutions de (S) est $\{(1, -1, 0) + z(1, 2, 1) \,|\, z \in \mathbb{R}\}$ (il s'agit de la droite de l'espace passant par le point $(1, -1, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (1, 2, 1)$). Il y en a une infinité .

III La méthode du pivot de Gauss

Comme nous venons de le voir, la résolution d'un système triangulaire est simple. Nous allons à présent introduire la méthode du pivot de Gauss qui permet, à l'aide d'opérations dites élémentaires sur les lignes, de se ramener à un système échelonné.

1) Opérations sur les lignes d'un système

Définition. *Notons $L_1, L_2, \ldots, L_n$ les n lignes du système (S). On appelle opération élémentaire sur les lignes de (S) l'une des trois opérations suivantes :*

- *L'échange des lignes i et j, avec $(i, j) \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$. On la note $L_i \leftrightarrow L_j$.*
- *La multiplication de la ligne $i \in [\![1, n]\!]$ par un scalaire λ non nul. On la note $L_i \leftarrow \lambda L_i$.*
- *L'ajout à la ligne $i \in [\![1, n]\!]$ de la ligne $j \in [\![1, n]\!] \backslash \{i\}$ multipliée par un scalaire α. On la note $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.*

Remarques : Nous déduisons de ces trois types d'opérations élémentaires, les opérations suivantes :

- $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ où $i \neq j$ dans $[\![1,n]\!]$, $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $\beta \in \mathbb{K}$ (on fait successivement les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i + \frac{\beta}{\alpha} L_j$ puis $L_i \leftarrow \alpha L_i$).
- $L_i \leftarrow L_i + \displaystyle\sum_{j\neq i} \beta_j L_j$ où $i \in [\![1,n]\!]$ et $(\beta_1,\ldots,\beta_{i-1},\beta_{i+1},\ldots,\beta_n) \in K^{n-1}$ (ajout à la $i^{\text{ème}}$ ligne d'une *combinaison linéaire* des autres lignes).

Proposition. *Si un système (S') est obtenu à partir d'un système (S) en effectuant une succession d'opérations élémentaires, alors (S) et (S') sont équivalents.*

Démonstration.
- Il évident qu'échanger deux lignes ne change pas les solutions du système.
- Soient $i \in [\![1,n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Notons $(S_{i,\lambda})$ le système obtenu lorsqu'on fait l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
  Si $(x_1,\ldots,x_p)$ est une solution de (S), alors les n lignes de (S) sont vraies. Elles restent vraies si l'on multiplie chaque membre de L_i par λ. Ainsi $(x_1,\ldots,x_p)$ est une solution de $(S_{i,\lambda})$.
  Réciproquement, si $(x_1,\ldots,x_p)$ est une solution de $(S_{i,\lambda})$ alors en faisant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i$, on obtient que $(x_1,\ldots,x_p)$ est une solution de (S).
  Nous en déduisons que les ensembles des solutions de (S) et $(S_{i,\lambda})$ sont égaux. Les systèmes sont donc équivalent.
- Soient $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Notons $(S_{i,j,\alpha})$ le système obtenu lorsqu'on fait l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.
  Si $(x_1,\ldots,x_p)$ est une solution de (S), alors les n lignes de (S) sont vraies. Elles restent vraies lorsque l'on fait $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$. Ainsi $(x_1,\ldots,x_p)$ est une solution de $(S_{i,j,\alpha})$.
  Réciproquement, si $(x_1,\ldots,x_p)$ est une solution de $(S_{i,j,\alpha})$, alors en faisant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i - \alpha L_j$, on obtient que $(x_1,\ldots,x_p)$ est une solution de (S).
  Nous en déduisons que les ensembles des solutions de (S) et $(S_{i,j,\alpha})$ sont égaux. Les systèmes sont donc équivalent. □

Le résultat suivant est évident (et il découle aussi simplement des opérations élémentaires) :

Corollaire. *Si un système (S) possède deux lignes identiques, alors le système (S') obtenu en supprimant l'une de ces deux lignes est équivalent à (S).*

Démonstration. Si L_i et L_j sont ces deux lignes, alors l'opération $L_i \leftarrow L_i - L_j$ transforme la ligne L_i en $0 = 0$. Cette égalité étant toujours vraie, on peut la supprimer (elle n'apporte aucune information sur les solutions éventuelles du système). □

2) Illustration de la méthode par des exemples

a) Exemple 1

Considérons le système suivant :

$$(S)\quad \begin{cases} \phantom{3x+{}} y - z + t = 1 \\ 3x + 2y + z - 9t = 1 \\ x + y - 3t = -2 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

Nous allons nous ramener à un système échelonné en faisant une succession bien précise d'opérations élémentaires sur les lignes du système.

Étape 1 :

• On s'assure que le coefficient devant x sur la première ligne est non nul. Si ce n'est pas le cas (comme ici), on échange la première ligne avec une autre ligne pour laquelle le coefficient devant x est non nul. Échangeons L_1 et L_4 :

$$(S) \iff \begin{cases} x + y - z = 2 & L_1 \leftrightarrow L_4 \\ 3x + 2y + z - 9t = 1 & \\ x + y - 3t = -2 & \\ y - z + t = 1 & \end{cases}$$

Désormais le coefficient placé devant x dans la première ligne (1 ici) s'appelle le premier pivot.

• En utilisant la première ligne, à l'aide d'opérations élémentaires, on annule le coefficient devant x dans les lignes suivantes :

$$(S) \iff \begin{cases} x + y - z = 2 & \\ -y + 4z - 9t = -5 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ z - 3t = -4 & L_2 \leftarrow L_3 - L_1 \\ y - z + t = 1 & \end{cases}$$

Étape 2 : Désormais on ne touche plus à la première ligne et on recommence la première étape avec les lignes restantes.

Le coefficient devant y dans la deuxième ligne est -1. Il s'agit du deuxième pivot. En utilisant la deuxième ligne, à l'aide d'opérations élémentaires, on annule le coefficient devant y dans les lignes suivantes :

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x + y - z = 2 \\ \quad - y + 4z - 9t = -5 \\ \quad\quad z - 3t = -4 \\ \quad\quad 3z - 8t = -4 & L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{cases}$$

Étape 3 : Désormais on ne touche plus aux deux premières lignes et on recommence la première étape avec les lignes restantes.

Le coefficient devant z dans la deuxième ligne est 1. Il s'agit du troisième pivot. En utilisant la troisième ligne, à l'aide d'opérations élémentaires, on annule le coefficient devant y dans la ligne suivante :

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x + y - z = 2 \\ \quad - y + 4z - 9t = -5 \\ \quad\quad z - 3t = -4 \\ \quad\quad\quad t = 8 & L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3 \end{cases}$$

Étape finale : Le système est désormais échelonné et même triangulaire ici. On a donc $t = 8$, puis $z = -4 + 3t = 20$, puis $y = 5 + 4z - 9t = 13$ et enfin $x = 2 - y + z = 9$. Le système admet donc $(9, 13, 20, 8)$ pour unique solution.

b) Exemple 2

Considérons le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} 2x + y - 3z + 7t = 12 \\ -x + y - 4t = -5 \\ x - 7y + 6z + 6t = 1 \\ x + 5y - 6z + 2t = 9 \end{cases}$$

Appliquons lui la même méthode que précédemment.

Étape 1 :

Le coefficient devant x sur la première ligne est égal à 2... qui est non nul. Il s'agit du premier pivot. En utilisant la première ligne, à l'aide d'opérations élémentaires, on annule le coefficient devant x dans les lignes suivantes :

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + y - 3z + 7t = 12 \\ \quad 3y - 3z - t = 2 & L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ \quad -15y + 15z + 5t = -10 & L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \\ \quad 9y - 9z + 3t = 6 & L_4 \leftarrow 2L_4 - L_1 \end{cases}$$

Remarquons que, puisque le pivot n'est pas égal à 1, nous avons utilisé à chaque ligne deux opérations élémentaires (par exemple pour la deuxième ligne, nous avons fait $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{-2}L_1$ puis $L_2 \leftarrow 2L_2$ pour ne pas se retrouver avec des fractions).

Étape 2 :

Le coefficient devant y sur la deuxième ligne est égal à 3. Il s'agit du deuxième pivot. En utilisant la deuxième ligne, à l'aide d'opérations élémentaires, on annule le coefficient devant y dans les lignes suivantes :

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + y - 3z + 7t = 12 \\ \quad 3y - 3z - t = 2 \\ \quad\quad 0 = 0 & L_3 \leftarrow 5L_3 + L_2 \\ \quad\quad 0 = 0 & L_4 \leftarrow 3L_4 - L_2 \end{cases}$$

Étape finale : Le système est désormais échelonné. Les deux dernières lignes sont toujours vérifiées, on peut donc les omettre. On les appelle conditions de compatibilité (on verra bientôt des exemples de systèmes à paramètres pour lesquels ces conditions sont des équations dépendant du paramètre). On se retrouve donc avec :

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + y - 3z + 7t = 12 \\ \quad 3y - 3z - t = 2 \end{cases}$$

On décide par exemple que z et t soient les inconnues auxiliaires. On les place dans le membre de droite pour faire apparaitre un système triangulaire :

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + y = 12 + 3z - 7t \\ \quad 3y = 2 + 3z + t \end{cases}$$

On a donc

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{3}(17 + 3z - 11t) \\ y = \dfrac{1}{3}(2 + 3z + t) \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système est

$$\left\{\left(\frac{1}{3}\Big(17+3z-11t\Big), \frac{1}{3}\Big(2+3z+t\Big), z, t\right) \,\middle|\, (z,t) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Il y en a une infinité.

c) Exemple 3

Considérons le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} 5x & + & 3y & - & z & = & 3 \\ x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 3x & - & y & + & z & = & 2 \end{cases}$$

Appliquons lui la même méthode que précédemment.

On annule le coefficient devant x dans toutes les lignes sauf la première :

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 5x & + & 3y & - & z & = & 3 & \\ & & 7y & - & 4z & = & 2 & \quad L_2 \leftarrow 5L_2 - L_1 \\ & - & 14y & + & 8z & = & 1 & \quad L_3 \leftarrow 5L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

On annule le coefficients devant y dans toutes les lignes sauf les deux premières :

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 5x & + & 3y & - & z & = & 3 & \\ & & 7y & - & 4z & = & 2 & \\ & & & & 0 & = & 5 & \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases}$$

Le système est désormais échelonné. La dernière ligne est une condition de compatibilité et elle est clairement fausse. Par conséquent le système est incompatible : il n'a pas de solutions.

d) Exemple 4 (avec un système à paramètres)

Soit $m \in \mathbb{R}$. Considérons le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} x & - & y & + & (1+m)z & = & 2-m \\ 2x & - & my & + & 3z & = & 2-m \\ (1-m)x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{cases}$$

Appliquons lui la même méthode que précédemment.

On annule le coefficient devant x dans toutes les lignes sauf la première :

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x & - & y & + & (1+m)z & = & 2-m & \\ & & (2-m)y & + & (1-2m)z & = & m-2 & \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & & (2-m)y & + & (m^2+1)z & = & (m-1)(2-m) & \quad L_3 \leftarrow L_3 - (1-m)L_1 \end{cases}$$

On s'assure que le coefficient devant y est non nul. Il faut faire deux cas.

- **Cas où $m = 2$:** On a alors

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ & & & - & 3z & = & 0 \\ & & & & 5z & = & 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x & - & y & + & 0 & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \end{cases}$$

  Ainsi l'ensemble des solutions est $\{x(1,1,0) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$.

- **Cas où $m \neq 2$:** Désormais le coefficient devant y est non nul et an annule le coefficient devant y dans la dernière ligne/

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x & - & y & + & (1+m)z & = & 2-m & \\ & & (2-m)y & + & (1-2m)z & = & m-2 & \\ & & & & m(m+2)z & = & m(2-m) & \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

  Pour obtenir z, on aimerait maintenant diviser par $m(m+2)$... et cela n'est possible que si $m \notin \{-2, 0\}$. Il va falloir différentier plusieurs cas :

  — **Cas où $m = 0$:** On a alors

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x & - & y & + & z & = & 2 \\ & & 2y & + & z & = & -2 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

  La dernière ligne est toujours vérifiée : on peut l'omettre. On décide par exemple que y soit l'inconnue auxiliaire. On a alors

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x & = & 2-y-z \\ z & = & -2-2y \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x & = & 4+3y \\ z & = & -2-2y \end{cases}$$

  L'ensemble des solutions est $\{(4,0,-2) + y(3,1,-2) \,|\, y \in \mathbb{R}\}$.

— **Cas où** $m=-2$ **:** La dernière ligne de (S) devient alors $0=-8$. Cette condition est bien entendue fausse : le système n'admet pas de solutions.

— **Cas où** $m\notin\{-2,0,2\}$ **:** On a alors $z=\dfrac{2-m}{m+2}$ et donc

$$(S) \iff \begin{cases} x-y &= 2-m-(1+m)\dfrac{2-m}{m+2} \\ (2-m)y &= m-2-(1-2m)\dfrac{2-m}{m+2} \\ z &= \dfrac{2-m}{m+2} \end{cases} \iff \begin{cases} x-y &= \dfrac{2-m}{m+2} \\ (2-m)y &= \dfrac{(2-m)(m-3)}{m+2} \\ z &= \dfrac{2-m}{m+2} \end{cases}$$

Puisque $m\neq 2$, on obtient alors $y=\dfrac{m-3}{m+2}$ et donc $x=y+\dfrac{2-m}{m+2}=\dfrac{-1}{m+2}$. Le système admet une unique solution :

$$\left(\frac{-1}{m+2},\frac{m-3}{m+2},\frac{2-m}{m+2}\right).$$

Remarque : Si $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^3$, alors $ax+by+cz=d$ est l'équation d'un plan de l'espace (on en reparlera un peu dans le cours sur les espaces vectoriels). Par conséquent $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ est une solution de (S) si et seulement si (x,y,z) se trouve sur l'intersection des plans d'équations $x-y+(1+m)z=2-m$, $2x-my+3z=2-m$ et $(1-m)x+y+2z=0$. On a démontré que :

- Si $m\in\{0,2\}$, alors l'intersection des trois plans est une droite.
- Si $m=-2$, alors l'intersection des plans est vide.
- Si $m\notin\{-2,0,2\}$, alors l'intersection des plans est un point.

3) Cas général

a) Algorithme du pivot de Gauss

La méthode que nous avons employée dans les exemples précédents s'appelle la méthode du pivot de Gauss. Elle permet de mettre un système sous forme échelonnée. Présentons-la de façon plus générale.

Supposons que (S) soit un système linéaire de n équations à p inconnues. Quitte à permuter les inconnues, on suppose qu'il existe $i_0\in[\![1,n]\!]$ tel que $a_{i_0 1}\neq 0$ (c'est-à-dire l'inconnue x_1 apparait au moins une fois dans le système).

Étape 1 :

- On échange des lignes afin que $a_{11}\neq 0$.
- On annule toute la colonne sous $a_{11}x_1$: pour tout $k\in[\![2,n]\!]$, on effectue l'opération élémentaire $L_k\leftarrow a_{11}L_k-a_{k1}L_1$ (ou $L_k\leftarrow L_k-\dfrac{a_{k1}}{a_{11}}L_1$).

A l'issue de cette étape, l'inconnue x_1 n'apparait plus que dans la première ligne et le coefficient a_{11} est appelé premier pivot. Désormais on ne touche plus à la première ligne.

Étape 2 :

- Si $a_{22}=\cdots=a_{n2}=0$, alors on passe à l'étape suivante.
  Sinon on échange des lignes afin que $a_{22}\neq 0$.
- On annule toute la colonne sous $a_{22}x_2$: pour tout $k\in[\![3,n]\!]$, on effectue l'opération élémentaire $L_k\leftarrow a_{22}L_k-a_{k2}L_2$ (ou $L_k\leftarrow L_k-\dfrac{a_{k2}}{a_{22}}L_2$).

A l'issue de cette étape, l'inconnue x_2 n'apparait plus que dans les deux premières lignes et le coefficient a_{22} est appelé deuxième pivot. Désormais on ne touche plus aux deux premières lignes.

...

Étape $i\in[\![1,\min(p,n-1)]\!]$ ***:***

- Si $a_{ii}=\cdots=a_{ni}=0$, alors on passe à l'étape suivante.
  Sinon on échange des lignes afin que $a_{ii}\neq 0$.
- On annule toute la colonne sous $a_{ii}x_i$: pour tout $k\in[\![i,n]\!]$, on effectue l'opération élémentaire $L_k\leftarrow a_{ii}L_k-a_{ki}L_i$ (ou $L_k\leftarrow L_k-\dfrac{a_{ki}}{a_{ii}}L_i$).

A l'issue de cette étape, l'inconnue x_i n'apparait plus que dans les i premières lignes et le coefficient a_{ii} est appelé $i^{\text{ième}}$ pivot. Désormais on ne touche plus aux i premières lignes.

...

Étape finale : On s'arrête lorsque tous les termes du membre de gauche des lignes restantes sont nuls ou sinon à l'issue de l'étape $\min(p,n-1)$.

Remarques :

- Cette méthode est systématique et aboutit à tous les coups. Cependant ce n'est pas toujours celle qui minimise les calculs.
- Nous mettrons en œuvre cette méthode en TP.

b) Résolution finale du système

Grâce à la méthode du pivot de Gauss, on peut transformer tout système linéaire en un système équivalent de la forme

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1i}x_i & + & \cdots & + & a_{1r}x_r & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2i}x_i & + & \cdots & + & a_{2r}x_r & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
 & & & & \ddots & & & & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & a_{ii}x_i & + & \cdots & + & a_{ir}x_r & + & \cdots & + & a_{ip}x_p & = & b_i \\
 & & & & & & & & \ddots & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & a_{rr}x_n & + & \cdots & + & a_{rp}x_p & = & b_r \\
 & & & & & & & & & & & & & & 0 & = & b_{r+1} \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & & & 0 & = & b_n
\end{array}\right.$$

avec $1 \leqslant r \leqslant \min(p, n)$ et, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $a_{i,i} \neq 0$.

Si $r < n$, alors les équations $b_{r+1} = 0$, $\ldots$ et $b_n = 0$ sont appelées conditions de compatibilité du système. Le système admet des solutions si et seulement si elles sont vraies. Plus précisément :

- Si l'une d'entre elle est fausse, alors le système est incompatible : il n'a pas de solutions.
- Si $b_{r+1} = \cdots = b_n = 0$, alors les conditions de compatibilité du système sont vraies et on peut les omettre. On se retrouve alors avec un système échelonné dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls. On a déjà vu comment résoudre ce type de systèmes :
  - Ou bien $n = p$ et alors le système est de Cramer : il admet une unique solution.
  - Ou bien $n < p$ et alors le système admet une infinité de solutions.

Si $r = n$, alors on a forcément $p \geqslant n$ et il s'agit déjà d'un système échelonné dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls.

Remarques :

- L'entier r s'appelle le rang du système. On y reviendra...
- Lorsque l'on dispose d'un système linéaire triangulaire dont les termes diagonaux sont tous non nuls, alors trouver la valeur de x_n, puis x_{n-1}, $\ldots$, puis x_1 par remontées successives revient à faire les opérations élémentaires suivante successivement :

$$L_n \leftarrow \frac{1}{a_{nn}} L_n, \quad L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - a_{n-1,n} L_n, \quad \ldots \quad L_1 \leftarrow L_1 - a_{1,n} L_n$$

$$L_{n-1} \leftarrow \frac{1}{a_{n-1,n-1}} L_{n-1}, \quad L_{n-2} \leftarrow L_{n-2} - a_{n-2,n-1} L_{n-1}, \quad \ldots \quad L_1 \leftarrow L_1 - a_{1,n-1} L_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{a_{22}} L_2, \quad L_1 \leftarrow L_1 - a_{1,2} L_1,$$

$$L_1 \leftarrow \frac{1}{a_{11}} L_1.$$

  Ainsi tout système de Cramer peut se résoudre uniquement via une succession d'opérations élémentaires sur les lignes. Cette remarque est importante pour le (dernier paragraphe du) chapitre suivant.

Nous avons démontré au passage le théorème suivant :

Théorème. *Si (S) est un système linéaire, alors on est toujours dans l'un des trois cas suivants :*

- *ou bien (S) ne possède aucune solution.*
- *ou bien (S) possède une unique solution.*
- *ou bien (S) possède une infinité de solutions.*