Chapitre 15

Polynômes réels ou complexes (résumé)

I Polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

1) Ensemble $\mathbb{K}[X]$

Définition. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X^k l'application $x \in \mathbb{K} \longmapsto x^k$ (avec les conventions d'écriture $X^0 = 1$ et $X^1 = X$). Une application $P : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ est un polynôme, ou application polynomiale, à coefficients dans $\mathbb{K}$ si il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, c'est-à-dire*

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Les nombres $a_0, \ldots, a_n$ sont appelés les coefficients du polynôme P.

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On dit qu'on évalue un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ en un point $x \in \mathbb{K}$ quand on donne la valeur de $P(x)$.

On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un monôme si il existe $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $P = aX^n$.

Théorème (unicité des coefficients d'un polynôme). *Les coefficients d'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ sont définis de manière unique, c'est-à-dire si $P \in \mathbb{K}[X]$ est tel qu'il existe $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leqslant n$, $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $(b_0, \ldots, b_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$ tels que*

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k,$$

alors $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $\ldots$, $a_p = b_p$ et $b_{p+1} = b_{p+2} = \cdots = b_n = 0$.

En particulier, la fonction constante égale à 0 est l'unique polynôme dont tous les coefficients sont nuls. On l'appelle le polynôme nul et on le note encore 0.

Définition. *Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ n'est pas le polynôme nul, alors on appelle degré de P, et on note $\deg(P)$, le plus grand des indices des coefficients non nuls de P.*

Si $p = \deg(P)$, alors a_p (resp. $a_p X^p$) est appelé le coefficient (resp. le terme) dominant de P. Si $a_p = 1$, alors on dit que P est unitaire.

Si P est le polynôme nul, alors on adopte la convention $\deg(0) = -\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que $\deg(P) \leqslant n$.

Remarque : Par définition, $a_p \neq 0$ et $\deg(P) \leqslant n$. De plus $\deg(P) \in \mathbb{N}$ si et seulement si P n'est pas le polynôme nul. Enfin $\deg(P) \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si P n'est pas constant.

Corollaire. *On a $P \in \mathbb{K}_n[X]$ si et seulement si il existe un unique $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. De plus $\deg(P) = n$ si et seulement si $a_n \neq 0$.*

2) Opérations algébriques sur les polynômes

Proposition. *Soient $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ dans $\mathbb{K}[X]$ de degrés respectifs $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$.*

1. *Si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda P \in \mathbb{K}[X]$. Si $\lambda \neq 0$, alors $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ et le coefficient dominant de λP est λa_p.*
2. *$P + Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$. Plus précisément :*

- Si $p=q$ et $a_p=-b_q$, alors $\deg(P+Q)<\max(\deg(P),\deg(Q))$ et aucune formule générale ne donne le coefficient dominant de $P+Q$.
- Si $p=q$ et $a_p\neq -b_p$, alors $\deg(P+Q)=\max(\deg(P),\deg(Q))$ et le coefficient dominant est a_p+b_q.
- Si $p\neq q$, alors $\deg(P+Q)=\max(\deg(P),\deg(Q))$ et le coefficient dominant est a_p (resp. b_q) si $p>q$ (resp. $p<q$).

2. $PQ\in\mathbb{K}[X]$ et $\deg(PQ)=\deg(P)+\deg(Q)$ et le coefficient dominant de PQ est a_pb_q.
   - $PQ=0$ si et seulement si $P=0$ ou $Q=0$.
   - $PQ=1$ si et seulement si P et Q sont des polynômes constants non nuls inverses l'un de l'autre.
3. $P\circ Q\in\mathbb{K}[X]$. Si P et Q ne sont pas constants, alors $\deg(P\circ Q)=\deg(P)\deg(Q)$ et le coefficient dominant de $P\circ Q$ est $a_p(b_q)^p$.

Corollaire. *Soient $P_1,\dots,P_k$ dans $\mathbb{K}[X]$. On a :*

$$\deg\left(\sum_{i=1}^k P_i\right)\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant k}\big(\deg(P_i)\big)\qquad \text{et}\qquad \deg\left(\prod_{i=1}^k P_i\right)=\sum_{i=1}^k\deg(P_i)$$

Si $P\in\mathbb{K}[X]$ et $k\in\mathbb{N}$, alors $P^k\in\mathbb{K}[X]$ et $\deg(P^k)=k\deg(P)$.

Corollaire. *Soit $n\in\mathbb{N}$. Si $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$et $(P,Q)\in(\mathbb{K}_n[X])^2$, alors $\lambda P+\mu Q\in\mathbb{K}_n[X]$.*

Définition. *Soit $P\in\mathbb{K}[X]$. On définit le polynôme dérivé P' de P par :*

- *Si P est constant, alors on pose $P'=0$.*
- *Si $P=\displaystyle\sum_{k=0}^n a_kX^k$ avec $n\in\mathbb{N}$ et $a_n\neq 0$, alors $P'=\displaystyle\sum_{k=1}^p ka_kX^{k-1}=\sum_{k=0}^{p-1}(k+1)a_{k+1}X^k$.*

Proposition. *Si $P\in\mathbb{K}[X]$ n'est pas constant, alors $\deg(P')=\deg(P)-1$.*

Proposition. *Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$. Soit $\lambda\in\mathbb{K}$. On a*

$$(P+Q)'=P'+Q',\qquad (\lambda P)'=\lambda P',\qquad (PQ)'=P'Q+QP',\qquad (P\circ Q)'=Q'\times(P'\circ Q).$$

II Division euclidienne de polynômes

1) Le théorème de la division euclidienne

Théorème (division euclidienne). *Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $B\neq 0$. Alors il existe un unique couple $(Q,R)\in\mathbb{K}[X]^2$ tel que $A=BQ+R$ et $\deg(R)<\deg(B)$. Le polynôme Q (resp. R) est appelé le quotient (resp. le reste) de la division euclidienne de A par B.*

Remarque : On a $\deg(Q)=\deg(A)-\deg(B)$.

Proposition. *Soient $P\in\mathbb{K}[X]$ et $a\in\mathbb{K}$. Le reste de la division euclidienne de P par $X-a$ est $P(a)$.*

2) Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

Définition (diviseur et multiple). *Soit $(A,B)\in\mathbb{K}[X]^2$ avec $B\neq 0$. On dit que A est divisible par B (ou que B divise A, ou que B est un diviseur de A ou que A est un multiple de B) dans $\mathbb{K}[X]$ si le reste de la division euclidienne de A par B est le polynôme nul, c'est-à-dire si il existe (un unique) $Q\in\mathbb{K}[X]$ tel que $A=BQ$. On note alors $B|A$.*

Proposition. *Si A et B sont des polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ tels que $B|A$, alors $\deg(B)\leqslant\deg(A)$.*

Proposition. *Soient A, B et C des polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$.*

1. *(réflexivité) $A|A$.*
2. *(antisymétrie) Si $A|B$ et $B|A$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $A = \lambda B$.*
3. *(transitivité) Si $C|B$ et $B|A$, alors $C|A$.*

Définition (polynôme irréductible). *Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ s'il est non constant et si les seuls polynômes qui le divisent sont les polynômes constants et les polynômes λP, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.*

Remarques : • Les polynômes de degré 1 sont irréductibles.

- Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si $P = P_1P_2$, avec P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degrés au moins 1 (c'est une caractérisation des polynômes non irréductibles).

III Racines d'un polynôme

1) Définition et caractérisation

Définition (racine d'un polynôme). *Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est une racine de P si $P(a) = 0$.*

Théorème. *Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors a est une racine de P si et seulement si $X - a$ divise P, c'est-à-dire si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - a)Q$. Le polynôme Q est alors unique.*

Proposition. *Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $n \geqslant 1$. Si $a_1, \dots, a_n$ sont des racines distinctes de P, alors $\displaystyle\prod_{j=1}^{k}(X - a_j)\Big| P$.*

Théorème. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ admet au moins $n + 1$ racines distinctes dans $\mathbb{K}$, alors $P = 0$. Autrement dit tout polynôme non nul de degré n admet au plus n racines distinctes.*

Corollaire. *Si un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ possède une infinité de racines dans $\mathbb{K}[X]$, alors il s'agit du polynôme nul.*

Corollaire. *Deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$ sont égaux si et seulement si $P - Q$ admet au moins $n + 1$ racines distinctes dans $\mathbb{K}$ si et seulement si $P - Q$ admet une infinité de racines dans $\mathbb{K}$.*

Corollaire. *Soit P est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et de coefficient dominant λ. Si P admet n racines distinctes $a_1, \dots, a_n$, alors $P = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - a_k)$.*

Définition. *Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit scindé sur $\mathbb{K}$ s'il s'écrit comme produit de polynômes de degré (exactement) 1 à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

Remarques : • Un polynôme constant n'est pas scindé.

- Le corollaire précédent nous assure qu'un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ admettant n racines distinctes est scindé (on dit qu'il est scindé à racines simples).

2) Ordre de multiplicité d'une racine

Définition (ordre de multiplicité d'une racine). *Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul et $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que $a \in \mathbb{K}$ est une racine d'ordre k de P si $(X - a)^k$ divise P et $(X - a)^{k+1}$ ne divise pas P. L'entier k est appelée l'ordre de multiplicité de la racine a.*

Si $k = 1$ (resp. $k = 2$, resp. $k \geqslant 2$), on dit que a est une racine simple (resp. double, resp. multiple).

Remarque : Si $(X - a)^k|P$, alors a est est racine de P d'ordre de multiplicité au moins k.

Proposition. *Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul et $k \in \mathbb{N}^*$. Le nombre $a \in \mathbb{K}$ est une racine d'ordre k de P si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-a)^k Q$ et $Q(a) \neq 0$. Le polynôme Q est alors unique.*

Proposition. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul admettant p racines $a_1, \ldots, a_p$ distinctes d'ordres de multiplicité respectifs $k_1, \ldots, k_p$. Alors*

$$\sum_{m=1}^{p} k_m \leqslant \deg(P) \qquad \text{et} \qquad \prod_{m=1}^{p} (X-a_m)^{k_m} \Big| P.$$

De plus, si λ désigne le coefficient dominant de P, alors

$$\sum_{m=1}^{p} k_m = \deg(P) \qquad \Longleftrightarrow \qquad P = \lambda \prod_{m=1}^{p} (X-a_m)^{k_m}.$$

Proposition. *Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Nous avons*

1. *a est une racine simple de P si et seulement si $P(a) = 0$ et $P'(a) \neq 0$.*
2. *a est une racine multiple de P si et seulement si $P(a) = P'(a) = 0$.*

3) Le théorème de D'Alembert-Gauss

Théorème (théorème de D'Alembert-Gauss). *Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

Théorème (factorisation dans $\mathbb{C}[X]$). *Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé. Plus précisément, donnons-nous $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul de coefficient dominant λ. Si $a_1, \ldots, a_p$ désignent (toutes) les racines complexes distinctes de P d'ordres de multiplicité respectifs $k_1, \ldots, k_p$. Alors $\displaystyle\sum_{m=1}^{p} k_m = n$ et $P = \lambda \displaystyle\prod_{m=1}^{p} (X-a_m)^{k_m}$.*

Remarque : Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont donc les polynômes de degré 1.

Corollaire. *Soient P et Q dans $\mathbb{C}[X]$. On a $P|Q$ si et seulement si toutes les racines de P (comptées avec leur multiplicité) sont racines de Q.*

4) Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si P admet une racine complexe non réelle a d'ordre k, alors $\overline{a}$ est aussi une racine complexe non réelle d'ordre k et il existe alors $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X-a)^k (X-\overline{a})^k Q$. Par ailleurs

$$(X-a)^k (X-\overline{a})^k = \big((X-a)(X-\overline{a})\big)^k = (X^2 - 2\,\mathfrak{Re}(a)X + |a|^2)^k \in \mathbb{R}[X].$$

Théorème. *Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$ admet n racines complexes, comptées avec multiplicité. Les racines non réelles sont conjuguées et de même ordre de multiplicité.*

Proposition. *Tout polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.*

Théorème (factorisation dans $\mathbb{R}[X]$). *Tout polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit comme le produit de polynômes de degré 1 et de polynômes de degré 2 de discriminants strictement négatifs. Plus précisément, donnons-nous $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul et de coefficient dominant λ. Alors*

$$P = \lambda \prod_{m=1}^{p} (X-a_m)^{k_m} \prod_{u=1}^{q} (X^2 + s_u X + t_u)^{\ell_u},$$

où $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_p$ sont (toutes) les racines réelles de P d'ordres de multiplicité respectifs $k_1, \ldots, k_p$ et, pour tout $u \in [\![1, q]\!]$, $\ell_u \in \mathbb{N}^*$, $(s_u, t_u) \in \mathbb{R}^2$ tels que $s_u^2 - 4t_u < 0$. De plus $\deg(P) = \displaystyle\sum_{m=1}^{p} k_m + 2\sum_{u=1}^{q} \ell_u$.

MÉTHODES

- Pour montrer une propriété portant sur des polynômes P_n indexés par un entier naturel n, on pense à utiliser un raisonnement par récurrence.

- Pour montrer qu'un polynôme P est de degré au plus $n \in \mathbb{N}$ (i.e. $P \in \mathbb{K}_n[X]$), on peut
  — montrer que tous les coefficients d'indice supérieurs strictement à n sont nuls.
  — utiliser les formules sur le degré (notamment toute combinaison linéaire de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ est encore dans $\mathbb{K}_n[X]$).

- Pour montrer qu'un polynôme P est de degré exactement $n \in \mathbb{N}$, on peut
  — montrer que $P \in \mathbb{K}_n[X]$ puis que a_n, le coefficient d'indice n, est non nul.
  — utiliser les formules sur le degré (sauf dans le cas où on additionne des polynômes de même degré et de coefficients dominants opposés).
  — essayer de développer (penser à utiliser la formule du binôme de Newton).

- Pour calculer le reste d'un polynôme P par un polynôme non nul B de degré $p \in \mathbb{N}^*$, on procède ainsi :
  — si $\deg(B) = 1$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}$ tel que $B = aX + b$ et le reste est le polynôme constant $P(-b/a)$.
  — si $p = \deg(B) \geqslant 2$, on commence par écrire précisément le théorème de la division euclidienne : « Il existe des polynômes P et Q uniques tels que $P = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B) = p$. »
  — puisque $\deg(R) \leqslant p - 1$, on écrit R sous la forme $R = \sum_{k=0}^{p-1} c_k X^k$.
  — on cherche les p coefficients $c_0, \dots, c_{p-1}$ donc il nous faut au moins p équations. Pour cela, quelle que soit la racine complexe a de B, on écrit $P(a) = \underbrace{B(a)Q(a)}_{=0} + \sum_{k=0}^{p-1} c_k a^k$ (ce qui fournit une équation).
  — s'il y a des racines multiples, on pense à dériver : $P' = B'Q + BQ' + \sum_{k=1}^{p-1} k c_k X^{k-1}$ et on évalue encore en les racines multiples de B (qui sont racines de B et B'), etc.

- Pour montrer que deux polynômes P et Q sont égaux, on peut
  — montrer qu'ils ont les mêmes coefficients.
  — montrer que $P - Q$ possède $n + 1$ racines distinctes (pour un certain $n \in \mathbb{N}$) tandis que $P - Q \in \mathbb{K}_n[X]$.
  — montrer que $P - Q$ admet une infinité de racines.
    Exemples : Unicité des polynômes de Tchebychev, des polynômes d'interpolation de Lagrange.
  — montrer que la somme des ordres de multiplicité des racines de $P - Q$ vaut au moins $n + 1$ (pour un certain $n \in \mathbb{N}$) tandis que $P - Q \in \mathbb{K}_n[X]$.

- Savoir reconnaitre que P est un polynôme particulier :
  — Soit $n \in \mathbb{N}$. Un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ prenant au moins $n + 1$ fois (en particulier une infinité de fois) une valeur donnée est constant (car alors, si a désigne cette valeur, $P - a$ s'annule $n + 1$ fois).
    Exemples : Si $T > 0$, un polynôme T-périodique est constant. Les fonctions cosinus et sinus ne sont pas des polynômes.
  — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ ayant au moins $n + 1$ (en particulier une infinité) points fixes est le polynôme X (car alors $P - X$ s'annule $n + 1$ fois).
    Exemples : La conjugaison complexe n'est pas polynomiale (par l'absurde).
  — Si P est de degré $n \in \mathbb{N}^*$, de coefficient dominant λ_n, et admet n racines distinctes $a_1, \dots, a_n$, alors $P = \lambda_n \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)$.
    Exemples : $X^n - 1$ est l'unique polynôme dont les racines sont $e^{2ik\pi/n}$, $0 \leqslant k \leqslant n - 1$.
  — Si P est de degré $n \in \mathbb{N}^*$, de coefficient dominant λ, et admet $p \in \mathbb{N}^*$ racines distinctes $a_1, \dots, a_p$ d'ordres de multiplicité respectifs $k_1, \dots, k_p$ vérifiant $\sum_{m=1}^{p} k_m = n$, alors $P = \lambda \prod_{m=1}^{p} (X - a_m)^{k_m}$.

- Pour trouver tous les polynômes satisfaisant une formule donnée, on procède souvent par analyse synthèse. On vérifie d'abord si le polynôme nul est solution. Ensuite si $P \neq 0$ satisfait le formule, on peut

— chercher d'abord une condition sur le degré p de P et, si p est petit, on détermine P à l'aide se ses coefficients.

Exemples : Le degré p d'un polynôme non nul P tel que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ vérifie $2p = 2+p$. D'où $p = 2$ et P s'écrit donc sous la forme $P = aX^2 + bX + c$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^2$. En injectant dans la formule, on trouve que $c = -a$ et $b = 0$.

Si la formule fait apparaitre des dérivées de P, on peut regarder le terme dominant pour obtenir des informations sur le degré.

Exemples : Si P est un polynôme non nul de degré p et de coefficient dominant a_p tel que $X^2P'' + P = XP'$, alors on a $p(p-1)a_p + a_p = pa_p$ et donc $p^2 - p + 1 = p$. D'où $p = 1$ et P s'écrit donc sous la forme $P = aX + b$ avec $(a,b) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}$. En injectant dans la formule, on trouve que $b = 0$.

— chercher toutes les racines de P (il y en a au plus $\deg(P)$).

On vérifie ensuite que les polynômes trouvés sont solutions (et on oublie pas le polynôme nul).

- Pour trouver une racine d'un polynôme P, on peut :
  - — remarquer que $X - a$ divise P (et alors a est racine de P).
  - — lire les indications de l'exercice...
  - — essayer des racines évidentes classiques : $0, 1, -1, i, -i, j = e^{2i\pi/3}, j^2$ (rappelons que $1 + j + j^2 = 0$).
  - — (uniquement dans le cas où $P \in \mathbb{R}[X]$) se rappeler que le conjugué d'une racine complexe non réelle de P déjà connue est forcément racine de P.

- Pour montrer qu'un polynôme Q non nul divise un polynôme P non nul, on peut
  - — effectuer la division euclidienne de P par Q et montrer que le reste est nul.
  - — montrer que toutes les racines complexes de Q sont racines de P, avec un ordre de multiplicité dans P supérieur ou égal à celui dans Q.

- Pour déterminer l'ordre de multiplicité k d'une racine $a \in \mathbb{K}$ de P (i.e. tel que $(X-a)^k$ divise P mais pas $(X-a)^{k+1}$), on peut
  - — écrire P sous la forme $P = (X-a)^k Q$ avec $Q(a) \neq 0$.
  - — effectuer la division euclidienne par $X - a$ successivement (en divisant à chaque fois le quotient obtenu par $X - a$) jusqu'à ce que le reste soit non nul.
  - — Dériver successivement P et montrer que $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$ mais $P^{(k)}(a) \neq 0$ (*ce critère ne sera vu qu'au second semestre*).

- Quelques polynômes particuliers à savoir factoriser dans $\mathbb{C}[X]$:
  - — Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{K}$, alors
  $$X^n - a^n = (X-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}X^k.$$
  - — Mieux : Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $\zeta = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ (avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$) alors on a vu dans le chapitre 4 comment déterminer toutes les racines $n^{\text{ième}}$ complexes de ζ (résultat non exigible mais à savoir retrouver). Voici comment on rédige proprement :
    - ⋆ On dit que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\sqrt[n]{r}\, e^{i(\theta+2k\pi)/n}$ est racine de $X^n - \zeta$.
    - ⋆ On connait donc n racines distinctes de $X^n - \zeta$ polynôme unitaire de degré n. Ainsi
    $$X^n - \zeta = \prod_{k=1}^{n}\left(X - \sqrt[n]{r}\, e^{i(\theta+2k\pi)/n}\right).$$

    On n'oublie pas que $X^n + \zeta = X^n - \zeta e^{i\pi} = X^n - re^{i(\theta+\pi)}$.
  - — On sait factoriser tous les polynômes de degré 2 dans $\mathbb{C}[X]$... et donc tous les polynômes du type $P = aX^{2p} + bX^p + c$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. Dans ce cas, on écrit que $P = Q(X^p)$ avec $Q = aX^2 + bX + c$. Si a et β désignent les deux racines complexes de Q (éventuellement confondues), alors $P = (X^p - a)(X^p - \beta)$ et on utilise le point précédent pour terminer la factorisation.

- Quelques polynômes particuliers à savoir factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:
  - — On sait factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes à coefficients réels de degré 2 à discriminant positif.
  - — Ceux dont on connait déjà une factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ sous la forme de produit de polynômes de degré 1. On garde les polynômes de ce produit ayant une racine réelle (qui sont donc dans $\mathbb{R}[X]$). Pour les autres, on utilise le fait que si $P \in \mathbb{R}[X]$ admet une racine complexe non réelle a d'ordre de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$, alors $\overline{a}$ aussi et le polynôme $(X^2 - 2\mathfrak{Re}(a)X + |a|^2)^k = (X-a)^k(X-\overline{a})^k$ divise P et $X^2 - 2\mathfrak{Re}(a)X + |a|^2$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

    ⚠ Si $P \in \mathbb{C}[X]$ possède une racine complexe a, alors il est faux a priori que $\overline{a}$ est aussi racine complexe.