I Polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$

1) Ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$

c) Degré d'un polynôme

Définition. *Soit* $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

- *Si P n'est pas le polynôme nul, alors on appelle degré de P, et on note $\deg(P)$, le plus grand des indices des coefficients non nuls de P :*

$$\deg(P) = \max\{k \in [\![0, n]\!] \,|\, a_k \neq 0\}.$$

Si $p = \deg(P)$, alors a_p (resp. $a_p X^p$) est appelé le coefficient (resp. le terme) dominant de P. Si $a_p = 1$, alors on dit que P est unitaire.

- *Si P est le polynôme nul, alors on adopte la convention* $\boxed{\quad}$.

Exemples :

Remarques :

- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On a
  - — $\deg(P) \in \mathbb{N}$ si et seulement si P n'est pas le polynôme nul.
  - — $\deg(P) \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si P n'est pas constant.
- Si $P \in \mathbb{K}[X]$ n'est pas le polynôme nul et si $p = \deg(P)$, alors P s'écrit de manière unique sous la forme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ avec $a_p \neq 0$.

Définition. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que $\deg(P) \leqslant n$.*

La proposition découle de la définition du degré d'un polynôme et de l'unicité de ses coefficients.

Proposition. *On a $P \in \mathbb{K}_n[X]$ si et seulement si il existe un unique $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. De plus $\deg(P) = n$ si et seulement si $a_n \neq 0$.*

Remarques :

- Insistons bien : un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ est de degré **au plus** n mais pas forcément de degré exactement n. En général, pour montrer qu'il polynôme est de degré inférieur ou égal à n, on utilise les opérations sur le degré (cf. paragraphe suivant). Pour montrer qu'un polynôme est de degré exactement n, on doit généralement calculer le terme de plus haut degré et vérifier qu'il n'est pas nul.
- $\mathbb{K}_0[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré au plus 0, c'est-à-dire l'ensemble des polynômes constants. Par conséquent on « identifie » $\mathbb{K}_0[X]$ avec $\mathbb{K}$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}_{n+1}[X] \subset \mathbb{K}[X]$. De plus $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}_n[X] = \mathbb{K}[X]$. $\rightsquigarrow$ EXERCICE.

2) Opérations algébriques sur les polynômes

Pour les règles sur le degré, on convient que, pour tout $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$,

$$(-\infty) + (-\infty) = a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty \qquad \text{et} \qquad \max(a, -\infty) = a.$$

Dans ce paragraphe, on considère $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ de degrés respectifs $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ (et donc on a $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$).

a) Structure d'espace vectoriel

Nous reviendrons sur le terme « espace vectoriel » dans le chapitre 18.

Proposition (multiplication d'un polynôme par un scalaire). *Si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda P \in \mathbb{K}[X]$ et*

Démonstration.

□

Proposition (addition de polynômes). *On a $P+Q \in \mathbb{K}[X]$ et*

avec inégalité stricte si et seulement si $\deg(P) = \deg(Q)$ et les coefficients dominants de P et Q sont opposés.

Démonstration.

□

Exemples :

Par récurrence, nous obtenons

Corollaire. *Soient $P_1, \ldots, P_k$ dans $\mathbb{K}[X]$. On a $\sum_{i=1}^{k} P_i \in \mathbb{K}[X]$ et*

Remarque : De nombreuses propriétés sur les polynômes héritent naturellement des propriétés de l'addition et de la multiplication sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Notamment, si P, Q, R sont dans $\mathbb{K}[X]$, alors

- $P + Q = Q + P$ (commutativité),
- $P + (Q + R) = (P + Q) + R$ (associativité),
- $P + 0 = 0 + P = P$ (0 est l'élément neutre pour l'addition),
- $P - P = 0$ ($-P$ est l'opposé de P, ou symétrique de P pour l'addition).

Nous reverrons ces propriétés lors du chapitre *Introduction aux espaces vectoriels*.

Corollaire. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$et $(P, Q) \in (\mathbb{K}_n[X])^2$, alors $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{K}_n[X]$.*

b) Produit de polynômes

Proposition (produit de polynômes). *On a $PQ \in \mathbb{K}[X]$ et*

De plus le coefficient dominant de PQ est le produit des coefficients dominants de P et de Q.

DÉMONSTRATION. Posons $n = p + q$ puis $a_{p+1} = \cdots = a_{p+q} = 0$ et $b_{q+1} = \cdots = b_{p+q} = 0$.

□

Exemples :

Par récurrence, nous obtenons :

Corollaire.

- *Soient $P_1, \ldots, P_k$ dans $\mathbb{K}[X]$. On a $\prod_{i=1}^{k} P_i \in \mathbb{K}[X]$ et*
- *Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $k \in \mathbb{N}$, alors $P^k \in \mathbb{K}[X]$ et*

Remarque : De nombreuses propriétés sur les polynômes héritent naturellement des propriétés de la multiplication sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Notamment, si P, Q, R sont dans $\mathbb{K}[X]$, alors

- $PQ = QP$ (commutativité),
- $P(QR) = (PQ)R$ (associativité),
- $P \times 1 = 1 \times P = P$ (1 est l'élément neutre pour le produit).

Qu'en est-il de l'inverse d'un polynôme ?

Proposition (polynôme inversibles). *Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$. On a $PQ = 1$ si et seulement si P et Q sont des polynômes constants non nuls inverses l'un de l'autre.*

DÉMONSTRATION.

□

Lorsque le produit de deux fonctions est nul, il est faux de conclure que l'une des deux est nulle. Par contre c'est le cas pour des polynômes :

Proposition (intégrité). *Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$. On a $PQ = 0$ si et seulement si $P = 0$ ou $Q = 0$.*

DÉMONSTRATION.

□

c) Composition de polynômes

Proposition (composition de polynômes). *On a $P \circ Q \in \mathbb{K}[X]$. De plus, si P et Q ne sont pas des polynômes constants, alors*

DÉMONSTRATION. Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $Q^k \in \mathbb{K}[X]$ et donc $a_k Q^k \in \mathbb{K}[X]$. Il s'ensuit que

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{p} a_k Q^k \in \mathbb{K}[X].$$

Supposons maintenant que P et Q ne sont pas des polynômes constants, c'est-à-dire $p = \deg(P) \geqslant 1$ et $q = \deg(Q) \geqslant 1$. Nous avons

$$\deg\left(\sum_{k=0}^{p-1} a_k Q^k\right) \leqslant \max_{0 \leqslant k \leqslant p-1} \deg\left(a_k Q^k\right) \leqslant \max_{0 \leqslant k \leqslant p-1} (kq) \leqslant (p-1)q < pq = \deg(a_p Q^p).$$

Par conséquent $P \circ Q$ est la somme de deux polynômes de degrés distincts et donc

$$\deg(P \circ Q) = \max\left(\deg\left(\sum_{k=0}^{p-1} a_k Q^k\right), \deg\left(a_p Q^p\right)\right) = pq.$$

□

Exemple :

3) Dérivée d'un polynôme

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors l'application $x \longmapsto P(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k.$$

Par conséquent $P' \in \mathbb{R}[X]$. On constate que l'on peut généraliser cette formule au cas complexes et définir ainsi la dérivée d'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$:

Définition. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit le polynôme dérivé P' de P par :*

- *Si P est constant, alors on pose $P' = 0$.*
- *Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_n \neq 0$, alors $P' = \sum_{k=1}^{p} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{p-1} (k+1) a_{k+1} X^k$.*

Exemples :

Proposition. *Si $P \in \mathbb{K}[X]$ n'est pas constant, alors*

DÉMONSTRATION.

□

Proposition. *Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a*

$$(P+Q)' = P' + Q', \qquad (\lambda P)' = \lambda P', \qquad (PQ)' = P'Q + QP', \qquad (P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q).$$

$\rightsquigarrow$ EXERCICE.