IV Sommes de Riemann à pas constant

1) Définition

Définition. *Soient a et b deux réels tels que $a<b$. Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. On appelle sommes de Riemann (à pas constant) de f les quantités suivantes :*

$$S_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right),\qquad n\in\mathbb{N}^*.$$

$$T_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right),\qquad n\in\mathbb{N}^*.$$

$$M_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right),\qquad n\in\mathbb{N}^*.$$

Il faut impérativement connaitre les deux premières sommes de Riemann. Souvent on prend $a=0$ et $b=1$ et, dans ce cas, les sommes deviennent :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad S_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\qquad \text{et}\qquad T_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

2) Convergence des sommes de Riemann à pas constant

Théorème. *Soient a et b deux réels tels que $a<b$. Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. Nous avons*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)=\int_a^b f(t)\,dt,\qquad \lim_{n\to+\infty} T_n(f)=\int_a^b f(t)\,dt\qquad \text{et}\qquad \lim_{n\to+\infty} M_n(f)=\int_a^b f(t)\,dt.$$

La démonstration du cas général de ce théorème est admise, conformément au programme. Dans le cas où f est de classe C^1, il découle du théorème suivant, qui donne des informations supplémentaires sur la vitesse de convergence de ces sommes de Riemann.

Théorème. *Soient a et b deux réels tels que $a<b$. Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$. Nous avons*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \left|S_n(f)-\int_a^b f(t)\,dt\right|\leqslant\frac{(b-a)^2}{2n}\max_{[a,b]}|f'|.$$

De même si on remplace $S_n(f)$ par $T_n(f)$ ou $M_n(f)$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Remarque : Cette inégalité permet de contrôler le terme d'erreur dans l'approximation de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ par $S_n(f)$, $T_n(f)$ ou $M_n(f)$. Plus précisément si on prend (par exemple) $n_0=\left\lfloor\dfrac{(b-a)^2}{2\varepsilon}\max_{[a,b]}|f'|\right\rfloor+1$, alors $\dfrac{(b-a)^2}{2n_0}\max_{[a,b]}|f'|\leqslant\varepsilon$ et donc S_{n_0} est une approximation de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ à ε-près.

Démonstration.

$\square$

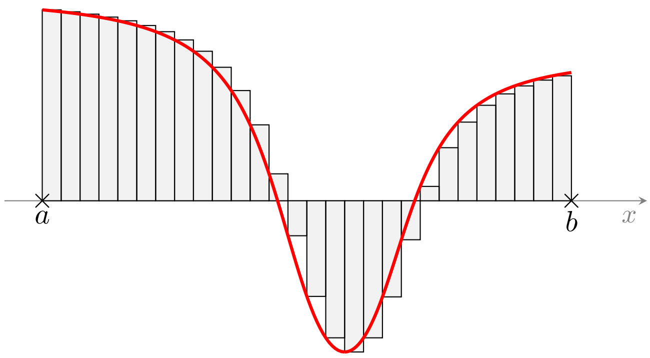
Exemple :

3) Interprétation géométrique en terme d'aire

a) La méthode des rectangles

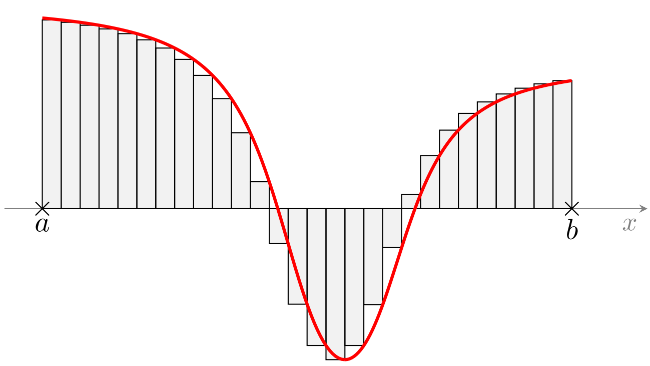
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ avec a et b deux réels tels que $a<b$. Fixons $n\in\mathbb{N}^*$.

Pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, $\left|\dfrac{b-a}{n}f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)\right|$ est l'aire du rectangle de hauteur $\left|f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)\right|$ et de base $\left[a+k\dfrac{b-a}{n},a+(k+1)\dfrac{b-a}{n}\right]$. La quantité $S_n(f)$ est donc la somme algébrique des aires de ces rectangles le long du segment $[a,b]$.



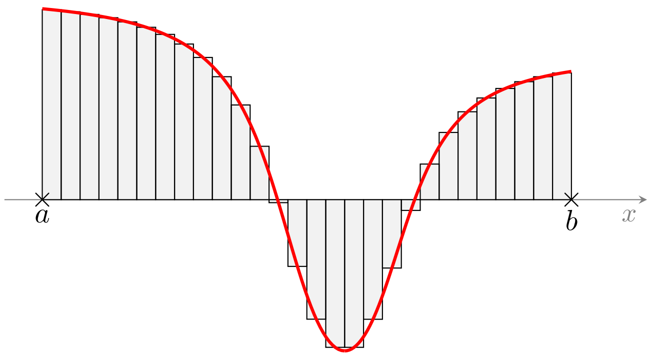
En rouge la courbe représentative de f.
Colorée en gris, la somme de Riemann $S_n(f)$ avec $n=28$.

Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $\left|\dfrac{b-a}{n}f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)\right|$ est l'aire du rectangle de hauteur $\left|f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)\right|$ et de base $\left[a+(k-1)\dfrac{b-a}{n},a+k\dfrac{b-a}{n}\right]$. La quantité $T_n(f)$ est donc la somme algébrique des aires de ces rectangles le long du segment $[a,b]$.



En rouge la courbe représentative de f.
Colorée en gris, la somme de Riemann $T_n(f)$ avec $n=28$.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\left|\frac{b-a}{n} f\left(a + \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right)\right|$ est l'aire du rectangle de hauteur $\left|f\left(a + \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right)\right|$ et de base $\left[a + k\frac{b-a}{n}, a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right]$. La quantité $M_n(f)$ est donc la somme algébrique des aires de ces rectangles le long du segment $[a,b]$.



EN ROUGE LA COURBE REPRÉSENTATIVE DE f.
COLORÉE EN GRIS, LA SOMME DE RIEMANN $M_n(f)$ AVEC $n = 28$.

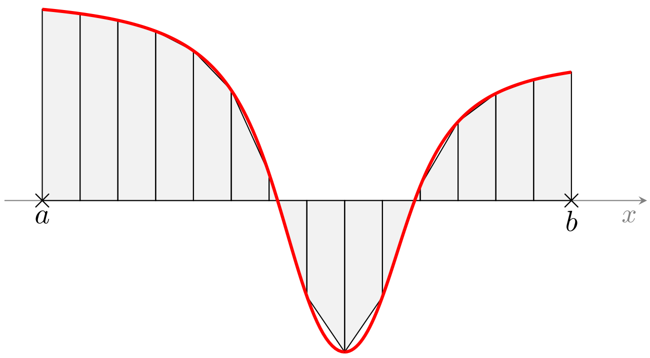
La convergence des sommes $(S_n(f))_{n\geqslant 1}$, $(T_n(f))_{n\geqslant 1}$ et $(M_n(f))_{n\geqslant 1}$ vers $\int_a^b f(t)\,dt$ permet d'interpréter l'intégrale d'une fonction continue sur $[a,b]$ comme l'aire algébrique de la surface délimitée par sa courbe représentative, par l'axe des abscisses et pas les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Ces convergences fournissent également une méthode numérique permettant d'approcher des intégrales par des sommes. Cette méthode d'approximation est appelée la méthode des rectangles (à gauche si l'on considère $(S_n(f))_{n\geqslant 1}$, à droite si l'on considère $(T_n(f))_{n\geqslant 1}$, au milieu si l'on considère $(M_n(f))_{n\geqslant 1}$). Nous la mettrons en œuvre cette année en TP avec le logiciel `Scilab`.

b) Méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes, que l'on mettra également en œuvre en TP, consiste à remplacer les rectangles des sommes de Riemann par des trapèzes rectangles de même base. On approche alors $\int_a^b f(t)\,dt$ par les sommes

$$\frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right) + f\left(a + \frac{k+1}{n}(b-a)\right)\right) = \frac{1}{2}\left(S_n(f) + T_n(f)\right), \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$



EN ROUGE LA COURBE REPRÉSENTATIVE DE f.
COLORÉE EN GRIS, LA SOMME $\frac{1}{2}(S_n(f) + T_n(f))$ AVEC $n = 14$.

On peut montrer que, si f est de classe C^2 (i.e f est deux fois dérivable et f'' est continue) sur $[a,b]$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left|\frac{1}{2}\left(S_n(f)+T_n(f)\right) - \int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2}\max_{[a,b]}|f''|.$$

Autrement dit cette quantité converge vers l'intégrale avec une vitesse $\frac{1}{n^2}$ (contre $\frac{1}{n}$ pour la méthode des rectangles).