IV Étude de fonctions définies par une intégrale

Soit f une fonction continue sur I. Soit u et v deux fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle J et à valeurs dans I. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) \in I$ et $v(x) \in I$ et f est donc continue sur $[u(x), v(x)]$. On peut alors définir la fonction

Voici un plan d'étude usuelle de telles fonctions (nous ne l'énonçons pas en tant que théorème puisqu'il faudra systématique tout redémontrer – l'étude sera guidée en général) :

- Puisque f est continue sur I, elle admet une primitive sur F sur I. On a alors
- *Continuité de g :* La fonction F est continue (puisque dérivable) sur I. Si u et v sont continues sur I, alors g est continue sur J.
- *Dérivabilité de g :* La fonction F est dérivable sur I. Si u et v sont dérivables sur J, alors g est dérivable sur J et
- *Limites de g en certains points :* Usuellement on essaie d'encadrer f par des fonctions bien choisies et dont on connait une primitive. On obtient ensuite la limite de g par encadrements.
- *Montrer que g est bornée dans le cas où f est de signe constant.* Supposons que f est positive sur I et qu'il existe m et M des réels tels que, pour tout $x \in J$, $m \leqslant u(x) \leqslant v(x) \leqslant M$. D'après la relation de Chasles,

Exemple : *Considérons* $g : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$

V Sommes de Riemann à pas constant

1) Définition

Définition. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. On appelle sommes de Riemann (à pas constant) de f les quantités suivantes :*

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right), \qquad n \in \mathbb{N}^*,$$

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right), \qquad n \in \mathbb{N}^*,$$

$$M_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right), \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

Il faut impérativement connaitre les deux premières sommes de Riemann. Souvent on prend $a = 0$ et $b = 1$ et, dans ce cas, les sommes deviennent :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad T_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

2) Convergence des sommes de Riemann à pas constant

Théorème. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Nous avons*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_a^b f(t)\,dt, \qquad \lim_{n\to+\infty} T_n(f) = \int_a^b f(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} M_n(f) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

La démonstration du cas général de ce théorème est admise, conformément au programme. Dans le cas où f est de classe C^1, il découle du théorème suivant, qui donne des informations supplémentaires sur la vitesse de convergence de ces sommes de Riemann.

Théorème. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$. Nous avons*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left| S_n(f) - \int_a^b f(t)\,dt \right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n} \max_{[a,b]} |f'|.$$

De même si on remplace $S_n(f)$ par $T_n(f)$ ou $M_n(f)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque : Cette inégalité permet de contrôler le terme d'erreur dans l'approximation de $\int_a^b f(t)\,dt$ par $S_n(f)$, $T_n(f)$ ou $M_n(f)$. Plus précisément si on prend (par exemple) $n_0 = \left\lfloor \frac{(b-a)^2}{2\varepsilon} \max_{[a,b]} |f'| \right\rfloor + 1$, alors $\frac{(b-a)^2}{2n_0} \max_{[a,b]} |f'| \leqslant \varepsilon$ et donc S_{n_0} est une approximation de $\int_a^b f(t)\,dt$ à ε-près.

Démonstration.

□

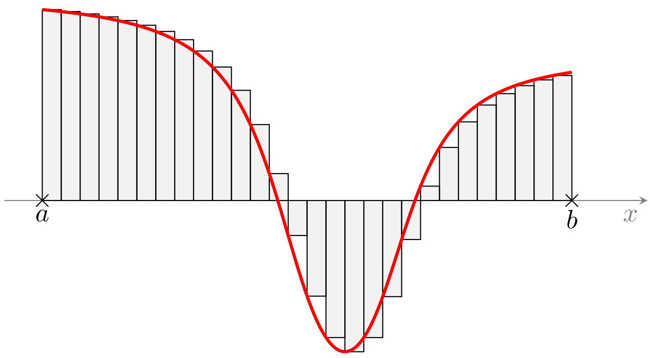
Exemple :

3) Interprétation géométrique en terme d'aire

a) La méthode des rectangles

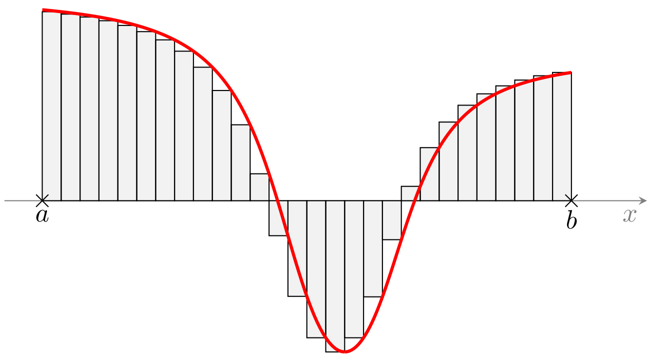
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ avec a et b deux réels tels que $a<b$. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\left|\dfrac{b-a}{n} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)\right|$ est l'aire du rectangle de hauteur $\left|f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)\right|$ et de base $\left[a+k\dfrac{b-a}{n}, a+(k+1)\dfrac{b-a}{n}\right]$. La quantité $S_n(f)$ est donc la somme algébrique des aires de ces rectangles le long du segment $[a,b]$.



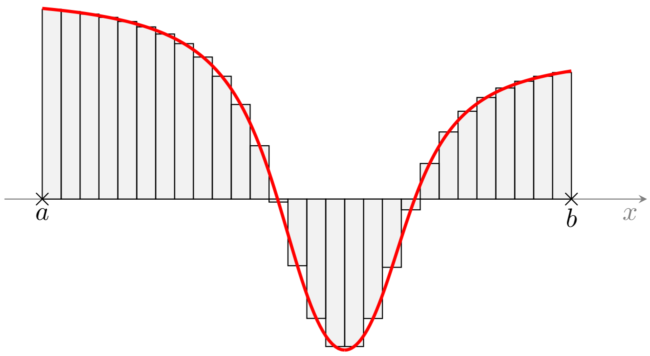
En rouge la courbe représentative de f.
Colorée en gris, la somme de Riemann $S_n(f)$ avec $n=28$.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\left|\dfrac{b-a}{n} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)\right|$ est l'aire du rectangle de hauteur $\left|f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)\right|$ et de base $\left[a+(k-1)\dfrac{b-a}{n}, a+k\dfrac{b-a}{n}\right]$. La quantité $T_n(f)$ est donc la somme algébrique des aires de ces rectangles le long du segment $[a,b]$.



En rouge la courbe représentative de f.
Colorée en gris, la somme de Riemann $T_n(f)$ avec $n=28$.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\left|\frac{b-a}{n} f\left(a+\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right)\right|$ est l'aire du rectangle de hauteur $\left|f\left(a+\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right)\right|$ et de base $\left[a+k\frac{b-a}{n}, a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right]$. La quantité $M_n(f)$ est donc la somme algébrique des aires de ces rectangles le long du segment $[a,b]$.



En rouge la courbe représentative de f.
Colorée en gris, la somme de Riemann $M_n(f)$ avec $n = 28$.

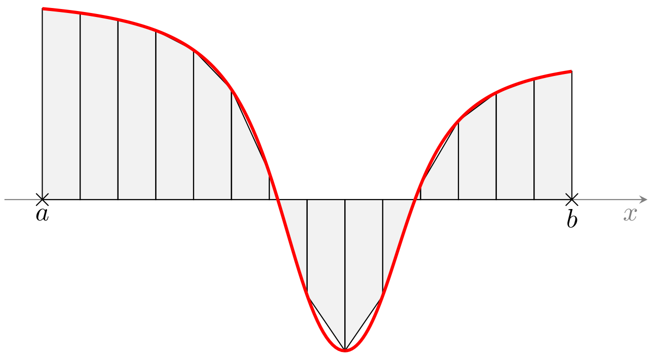
La convergence des sommes $(S_n(f))_{n\geqslant 1}$, $(T_n(f))_{n\geqslant 1}$ et $(M_n(f))_{n\geqslant 1}$ vers $\int_a^b f(t)\,dt$ permet d'interpréter l'intégrale d'une fonction continue sur $[a,b]$ comme l'aire algébrique de la surface délimitée par sa courbe représentative, par l'axe des abscisses et pas les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Ces convergences fournissent également une méthode numérique permettant d'approcher des intégrales par des sommes. Cette méthode d'approximation est appelée la méthode des rectangles (à gauche si l'on considère $(S_n(f))_{n\geqslant 1}$, à droite si l'on considère $(T_n(f))_{n\geqslant 1}$, au milieu si l'on considère $(M_n(f))_{n\geqslant 1}$). Nous la mettrons en œuvre cette année en TP avec le logiciel `Scilab`.

b) Méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes, que l'on mettra également en œuvre en TP, consiste à remplacer les rectangles des sommes de Riemann par des trapèzes rectangles de même base. On approche alors $\int_a^b f(t)\,dt$ par les sommes

$$\frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)+f\left(a+\frac{k+1}{n}(b-a)\right)\right) = \frac{1}{2}\left(S_n(f)+T_n(f)\right), \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$



En rouge la courbe représentative de f.
Colorée en gris, la somme $\frac{1}{2}(S_n(f)+T_n(f))$ avec $n = 14$.

On peut montrer que, si f est de classe C^2 (i.e f est deux fois dérivable et f'' est continue) sur $[a,b]$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left|\frac{1}{2}\left(S_n(f)+T_n(f)\right)-\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2}\max_{[a,b]}|f''|.$$

Autrement dit cette quantité converge vers l'intégrale avec une vitesse $\frac{1}{n^2}$ (contre $\frac{1}{n}$ pour la méthode des rectangles).

VI Extension aux intégrales de fonctions continues par morceaux

1) Notion de fonction continue par morceaux sur un segment

Définition (subdivision). *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On appelle subdivision de $[a, b]$ toute suite finie $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, telle que $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$.*

Définition. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,*

- *f est continue sur $]a_{i-1}, a_i[$,*
- *f admet des limites finies à droite en a_{i-1} et à gauche en a_i.*

Autrement dit, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la restriction de f à l'intervalle $]a_{i-1}, a_i[$ est prolongeable par continuité à $[a_{i-1}, a_i]$.

On dit alors que σ est une subdivision bien adaptée à f. On note $C_m([a, b])$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

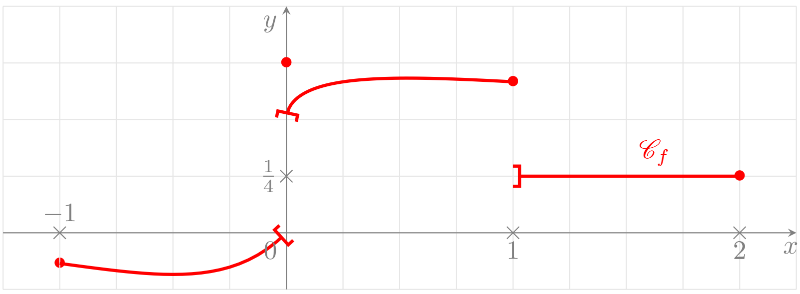
Remarque : Si $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ et $\sigma' = (a'_0, a'_1, \ldots, a'_m)$ sont deux subdivisions de $[a, b]$ telles que $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subset \{a'_0, a'_1, \ldots, a'_n\}$, alors on dit que σ' est plus fine que σ. Si σ est une subdivision adapté à f, alors toute subdivision plus fine est encore adaptée à σ. On travaille en général avec la subdivision adaptée la moins fine.

Exemples :

- *Les fonctions continues sont continues par morceaux.*
- *La fonction partie entière est continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$.*
- *La fonction*

$$f : x \in [-1, 2] \longmapsto \begin{cases} xe^{2x} & \text{si} \quad x \in [-1, 0[, \\ \dfrac{3}{4} & \text{si} \quad x = 0, \\ \dfrac{1 + \sqrt{x}}{2 + x} & \text{si} \quad x \in]0, 1], \\ \dfrac{1}{4} & \text{si} \quad x \in]1, 2], \end{cases}$$

  est continue par morceaux sur $[-1, 2]$.



- *La fonction*

$$g : x \in [0, 1] \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0, \\ \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \in]0, 1], \end{cases}$$

  n'est pas continue par morceaux car $g\big|_{]0,1]}$ n'admet pas de limite à droite en 0.
- *La fonction*

$$h : x \in [0, 1] \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0, \\ 2^{-n} & \text{si} \quad x \in]2^{-(n+1)}, 2^{-n}] \text{ et } n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

  n'est pas continue par morceaux car elle possède une infinité de points de discontinuité.

Proposition. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$. Alors les fonctions*

$$|f|, \qquad \lambda f, \qquad f + g \qquad \text{et} \qquad fg$$

sont continues par morceaux sur $[a, b]$.

DÉMONSTRATION. Quitte à prendre une subdivision suffisamment fine, on peut considérer une subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ adaptée à f et g. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Les fonctions f et g sont continues sur $]a_{i-1}, a_i[$ et admettent des limites finies à gauche en a_{i-1} et à droite en a_i. C'est donc aussi le cas des fonctions $|f|$, λf, $f + g$ et fg. Elles sont donc continues par morceaux sur $[a, b]$. $\square$

2) Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

La relation de Chasles entraîne que l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$ est la somme des intégrales de f sur $[a, c]$ et $[c, b]$, quelque soit le réel c. On peut donc suivre une subdivision pour calculer une intégrale. Cela est à la base de la définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.

Théorème. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Considérons $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision adaptée à f. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, notons f_i le prolongement par continuité de $f\big|_{]a_{i-1}, a_i[}$ à $[a_{i-1}, a_i]$. Le réel*

$$I(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(t)\, dt$$

ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée σ.

DÉMONSTRATION. Considérons deux subdivisions $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ et $\sigma = (b_0, \ldots, b_m)$ adaptées à f. Supposons par exemple que $n < m$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, notons f_i le prolongement par continuité de $f\big|_{]a_{i-1}, a_i[}$ à $[a_{i-1}, a_i]$. Pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, notons $\tilde{f}_j$ le prolongement par continuité de $f\big|_{]b_{j-1}, b_j[}$ à $[b_{j-1}, b_j]$.

Notons $k_0 = 0$ et, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, notons k_i le nombre de b_j tels que $b_j \in]a_{i-1}, a_i]$. On peut ainsi ranger par ordre croissant :

$$\begin{aligned} a = a_0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_{k_1} \leqslant a_1 < b_{k_1+1} < \cdots < b_{k_1+k_2} \leqslant a_2 < \ldots \\ \cdots < b_{k_1+\cdots+k_{n-1}} \leqslant a_{n-1} < \cdots < b_{k_1+\cdots+k_{n-1}+1} < \cdots < b_{k_1+\cdots+k_n} = b_m = a_n = b. \end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(t)\, dt = \sum_{j=k_0+\cdots+k_{i-1}}^{k_0+\cdots+k_i} \int_{b_{j-1}}^{b_j} f_i(t)\, dt.$$

Or pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$, $f_i = \tilde{f}_j$ sur $[b_{j-1}, b_j]$. Ainsi

$$I(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=k_0+\cdots+k_{i-1}}^{k_0+\cdots+k_i} \int_{b_{j-1}}^{b_j} \tilde{f}_j(t)\, dt = \sum_{j=1}^{m} \int_{b_{j-1}}^{b_j} \tilde{f}_j(t)\, dt = I(f, \sigma').$$

Nous en déduisons que la définition ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée à f. $\square$

Définition. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. On définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ par*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(t)\, dt,$$

où $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ est une subdivision quelconque adaptée à f et, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f_i désigne le prolongement par continuité de $f\big|_{]a_{i-1}, a_i[}$ à $[a_{i-1}, a_i]$.

Exemple : *Soit* $f : x \in [-4, 4] \longmapsto \begin{cases} \pi & \text{si } x = -4 \\ -\dfrac{4}{x} & \text{si } x \in]-4, -1] \\ (2x+1)^2 & \text{si } x \in]-1, -3[\\ -4\ln(4) & \text{si } x \in [3, 4]. \end{cases}$

3) Propriétés des intégrales de fonctions continues par morceaux sur un segment

Excepté la propriété de stricte positive, toutes les propriétés des intégrales des fonctions continues sur un segment sont vraies pour les intégrales des fonctions continues par morceaux sur un segment.

Proposition. *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I. Soient $(a,b,c) \in I^3$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons*

1. $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$ *et* $\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0$.
2. $\displaystyle\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt$.
3. $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$ *(relation de Chasles).*

Supposons que $a < b$.

4. *Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$.
5. *Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$.
6. $\displaystyle(b-a)\min_{[a,b]} f \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant (b-a)\max_{[a,b]} f$.
7. $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt \leqslant (b-a)\max_{[a,b]} |f|$.

$\rightsquigarrow$ Exercice.

La propriété de stricte positivité n'est plus valable pour l'intégrale de fonctions continues par morceaux.

Par exemple la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & si \quad t \in [0,1[\\ 1 & si \quad t = 1 \end{cases}$ *est positive et vérifie* $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 0$ *mais il ne s'agit pas de l'application nulle sur* $[0,1]$.

Remarque : Plus généralement, si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur un segment $[a,b]$ et qui ne diffèrent que d'un nombre fini de points. Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$.

$\rightsquigarrow$ Exercice.