II Intégrale d'une fonction continue sur un segment

3) Extension au cas des fonctions continues par morceaux

La relation de Chasles entraîne que l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$ est la somme des intégrales de f sur $[a, c]$ et $[c, b]$, quelque soit le réel c. On peut donc suivre une subdivision pour calculer une intégrale. Cela est à la base de la définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.

Théorème 1. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Considérons $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision adaptée à f. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, notons f_i le prolongement par continuité de $f\big|_{]a_{i-1}, a_i[}$ à $[a_{i-1}, a_i]$. Le réel*

$$I(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(t)\, dt$$

ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée σ.

Démonstration. Considérons deux subdivisions $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ et $\sigma = (b_0, \dots, b_m)$ adaptées à f. Supposons par exemple que $n < m$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, notons f_i le prolongement par continuité de $f\big|_{]a_{i-1}, a_i[}$ à $[a_{i-1}, a_i]$. Pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, notons $\tilde{f}_j$ le prolongement par continuité de $f\big|_{]b_{j-1}, b_j[}$ à $[b_{j-1}, b_j]$.

Notons $k_0 = 0$ et, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, notons k_i le nombre de b_j tels que $b_j \in \,]a_{i-1}, a_i]$. On peut ainsi ranger par ordre croissant :

$$\begin{aligned} a = a_0 = b_0 < b_1 < \dots < b_{k_1} \leqslant a_1 < b_{k_1+1} < \dots < b_{k_1+k_2} \leqslant a_2 < \dots \\ \dots < b_{k_1+\dots+k_{n-1}} \leqslant a_{n-1} < \dots < b_{k_1+\dots+k_{n-1}+1} < \dots < b_{k_1+\dots+k_n} = b_m = a_n = b. \end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(t)\, dt = \sum_{j=k_0+\dots+k_{i-1}}^{k_0+\dots+k_i} \int_{b_{j-1}}^{b_j} f_i(t)\, dt.$$

Or pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$, $f_i = \tilde{f}_j$ sur $[b_{j-1}, b_j]$. Ainsi

$$I(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=k_0+\dots+k_{i-1}}^{k_0+\dots+k_i} \int_{b_{j-1}}^{b_j} \tilde{f}_j(t)\, dt = \sum_{j=1}^{m} \int_{b_{j-1}}^{b_j} \tilde{f}_j(t)\, dt = I(f, \sigma').$$

Nous en déduisons que la définition ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée à f. □

Définition 2. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. On définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ par*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(t)\, dt,$$

où $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ est une subdivision quelconque adaptée à f et, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f_i désigne le prolongement par continuité de $f\big|_{]a_{i-1}, a_i[}$ à $[a_{i-1}, a_i]$.

Exemple : *Soit* $f : x \in [-4, 4] \longmapsto \begin{cases} \pi & \textit{si} \quad x = -4 \\ -\dfrac{4}{x} & \textit{si} \quad x \in \,]-4, -1] \\ (2x+1)^2 & \textit{si} \quad x \in \,]-1, -3[\\ -4\ln(4) & \textit{si} \quad x \in [3, 4]. \end{cases}$

Proposition 3. *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I. Soient $(a,b,c) \in I^3$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons*

1. $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$ *et* $\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0.$
2. $\displaystyle\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt.$
3. $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$ *(relation de Chasles).*

Supposons que a et b sont deux réels tels que $a < b$.

4. *Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0.$
5. *Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt.$
6. $\displaystyle(b-a)\min_{[a,b]} f \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant (b-a)\max_{[a,b]} f.$
7. $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt \leqslant (b-a)\max_{[a,b]} |f|.$

$\rightsquigarrow$ Exercice.

La propriété de stricte positivité n'est plus valable pour l'intégrale de fonctions continues par morceaux. Considérons par exemple la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in [0,1[\\ 1 & \text{si} \quad t = 1 \end{cases}$ pour laquelle $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 0$. Pourtant il ne s'agit pas de l'application nulle sur $[0,1]$.

Proposition 4. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ qui ne diffèrent que d'un nombre fini de points. Alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt.$

Démonstration. La fonction $h = f - g$ est nulle sur $[a,b]$ sauf un nombre fini de points. Considérons $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ une subdivision adapté à h. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et pour tout $x \in \,]a_{i-1}, a_i[$, $h(x) = 0$ donc h_i le prolongement par continuité de $h\big|_{]a_{i-1},a_i[}$ à $[a_{i-1}, a_i]$ est la fonction constante égale à 0 et donc son intégrale de a_{i-1} et a_i est nulle. Par conséquent

$$\int_a^b (f(t) - g(t))\,dt = \int_a^b h(t)\,dt = \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} h_i(t)\,dt = 0.$$

Par linéarité, nous en déduisons que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt.$ $\square$