Chapitre 11

Étude locale de fonctions : limites et continuité en un point

Dans tout ce chapitre, f désigne une fonction réelle de la variable réelle de domaine de définition D_f et I désigne un intervalle inclus dans D_f qui est non vide et non réduit à un point, c'est-à-dire

- ou bien il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ tel que $I =]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $[a, b]$,
- ou bien il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $I =]-\infty, a[$, $]-\infty, a]$, $]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$,
- ou bien $I = \mathbb{R}$.

On dit que I est un intervalle ouvert si $I = \mathbb{R}$ ou s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $a < b$ tel que $I =]a, b[$, $I =]a, +\infty[$ ou $I =]-\infty, a[$. On dit que I est un intervalle fermé si $I = \mathbb{R}$ ou s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $a < b$ tel que $I = [a, b]$ (on parle alors de segment), $I = [a, +\infty[$ ou $I =]-\infty, a]$.

I Limite et continuité en un point

1) Notion de voisinage

Définition (voisinage).

- *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On appelle voisinage de x_0 tout intervalle contenant x_0 et dont x_0 n'est pas une extrémité.*
- *On appelle voisinage de $+\infty$ tout intervalle du type $]A, +\infty[$ ou $[A, +\infty[$, avec $A \in \mathbb{R}$.*
- *On appelle voisinage de $-\infty$ tout intervalle du type $]-\infty, A[$ ou $]-\infty, A]$ avec $A \in \mathbb{R}$.*

Remarque : Souvent on prend pour voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, un intervalle ouvert centré en x_0, c'est-à-dire du type $V =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ avec $\delta > 0$. On peut toujours s'y ramener quitte à réduire l'amplitude du voisinage considéré.

Définition. *Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On dit qu'une propriété P (portant sur les réels) est vraie au voisinage de x_0 si il existe un voisinage V de x_0 tel que, pour tout $x \in V$, $P(x)$ est vraie. Ces propriétés sont appelées propriétés locales.*

2) Limite finie en un point

a) Définition

Définition. *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une éventuelle extrémité finie de I. On dit que f admet ℓ pour limite en x_0 si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad \big(|x - x_0| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\big),$$

i.e. *pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.*

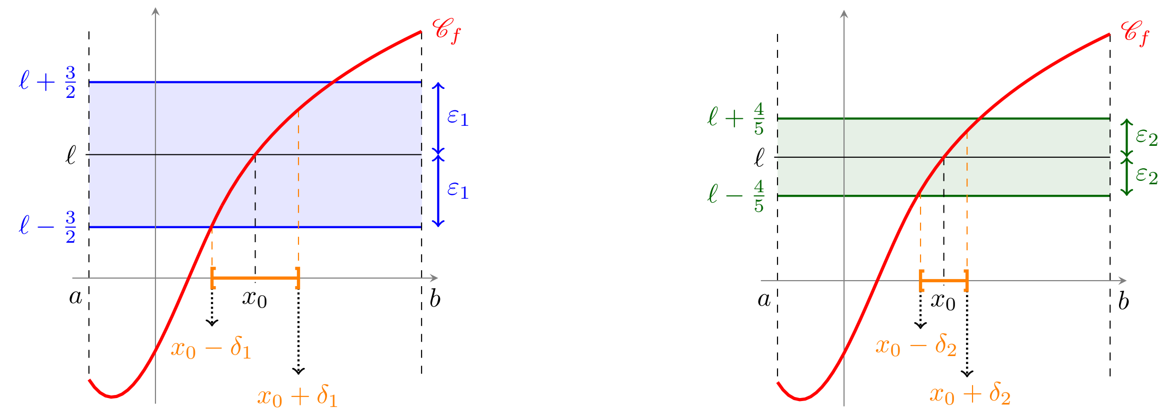
Remarques :

- On dit aussi que $f(x)$ tend (ou converge) vers ℓ quand x tend vers x_0 ou que f tend (ou converge) vers ℓ en x_0.
- ⚠ Le réel δ dans la définition dépend de x_0 et de ε.
- Cette définition signifie que l'on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de ℓ (c'est-à-dire à distance ε de ℓ, pour tout ε) dès que x est suffisamment proche de x_0 (à distance δ de x_0, pour un δ dépendant du choix de x).
- Dans la définition ci-dessus, on peut remplacer $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ par $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ (c'est équivalent puisqu'elle est valable pour tout $\varepsilon > 0$). On peut aussi remplacer $|x - x_0| \leqslant \delta$ par $|x - x_0| < \delta$ (quitte à réduire légèrement δ).

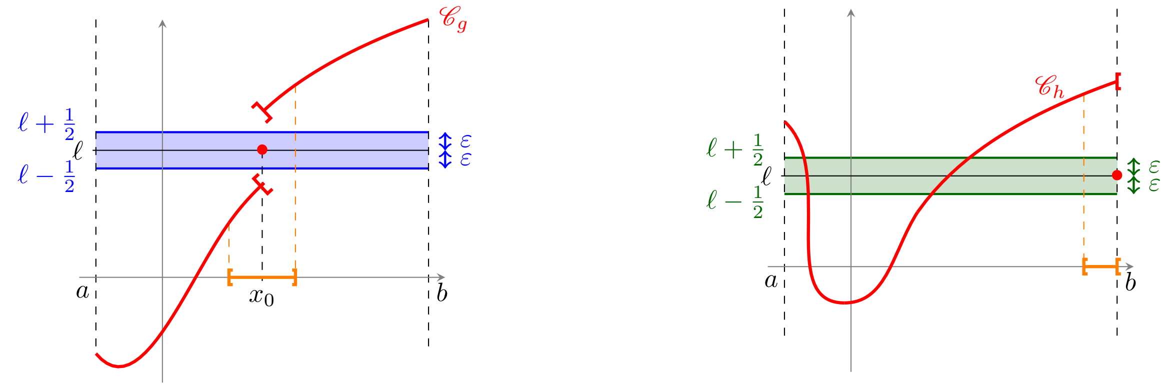
La notion de limite en $x_0 \in \mathbb{R}$ s'étend au cas où f est définie sur $I \backslash \{x_0\}$:

Définition. *Soit $x_0 \in I$. Soit f une fonction définie sur $I \backslash \{x_0\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite en x_0 si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap \big([x_0 - \delta, x_0[\cup]x_0, x_0 + \delta]\big), \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$



Ci-dessus f est définie sur $I=[a,b]$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$. La fonction f admet ℓ pour limite en $x_0\in I$. A gauche, nous avons choisi $\varepsilon_1=3/2$ et nous avons trouvé $\delta_1>0$ tel que, pour tout $x\in[x_0-\delta_1,x_0+\delta_1]$, les valeurs de $f(x)$ se retrouvent dans la bande bleue (i.e. $[\ell-\varepsilon_1,\ell+\varepsilon_1]$). A droite, nous avons choisi $\varepsilon_2=4/5$ et nous avons avons trouvé $\delta_2>0$ tel que, pour tout $x\in[x_0-\delta_2,x_0+\delta_2]$ (un intervalle plus resserré autour de x_0 qu'à gauche), les valeurs de $f(x)$ se retrouvent dans la bande verte (i.e. $[\ell-\varepsilon_2,\ell+\varepsilon_2]$).



Ci-dessus à gauche, la fonction g n'admet pas de limite en x_0. En effet, si elle admettait une limite finie ℓ, alors on aurait $\ell=g(x_0)$. Mais si on prend $\varepsilon=1/2$ (bande bleue), on ne peut pas trouver de voisinage de x_0 dont tous les éléments ont leur image par g dans la bande bleue. Ci-dessus à droite, la fonction h n'admet pas non plus de limite en $x_0=b$ (l'extrémité droite de I). En effet, si elle admettait une limite finie ℓ, alors on aurait $\ell=h(x_0)$. Mais si on prend $\varepsilon=1/2$ (bande verte), on ne peut pas trouver de voisinage de x_0 dont tous les éléments ont leur image par h dans la bande verte.

Remarque : Dans les deux exemples ci-dessus, l'absence de limite finie en x_0 provient du fait que la courbe de la fonction présente un saut en x_0. Cela renvoie à l'approche intuitive de la notion de continuité (que l'on verra de façon rigoureuse dans les prochains paragraphes) : *une fonction est continue en x_0 si l'on peut tracer sa courbe au voisinage de x_0 sans lever le crayon.*

3) Premières propriétés

Proposition (unicité de la limite). *Soient $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ et x_0 un point de I ou une éventuelle extrémité finie de I. Si f admet $\ell\in\mathbb{R}$ et $\ell'\in\mathbb{R}$ comme limite alors $\ell=\ell'$.*
On dit alors que ℓ est la *limite de f en x_0 et on note*

$$\ell=\lim_{x\to x_0} f(x),\qquad \ell=\lim_{x_0} f\qquad \textit{ou}\qquad f(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}\ell.$$

Démonstration.

□

Remarque : On peut toujours se ramener à une limite en 0 en utilisant l'équivalence suivante :

$$f(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}\ell\qquad\Longleftrightarrow\qquad f(x_0+h)\underset{h\to 0}{\longrightarrow}\ell.$$

On peut aussi se ramener à une limite nulle en utilisant l'équivalence suivante :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell \iff f(x) - \ell \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0 \iff \left|f(x) - \ell\right| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

4) Continuité en un point

a) Définition

La définition de la continuité en un point repose sur la proposition suivante :

Proposition. *Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet pour limite finie ℓ en $x_0 \in I$ alors $\ell = f(x_0)$.*

Démonstration.

□

Définition (continuité en un point). *Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite continue en $x_0 \in I$ si f admet une limite en x_0 (cette limite est alors nécessairement $f(x_0)$), c'est-à-dire*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad \big(|x - x_0| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon\big).$$

Dans le cas contraire on dit que f est discontinue en x_0 ou que x_0 est un point de discontinuité de f.

Remarques :

- La continuité de f en un point est une notion locale : seul compte le comportement de f au voisinage de ce point.
- La notion de continuité en x_0 n'est pas définie lorsque x_0 est une (éventuelle) extrémité réelle de I qui n'appartient par à I. Dans le prochain paragraphe, nous introduisons la notion de prolongement par continuité.

b) Prolongement par continuité

Proposition/Définition. *Soit $x_0 \in I$. Soit f une fonction définie sur $I \backslash \{x_0\}$ et à valeurs réelles. Supposons que f admettent une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0. Posons*

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{f} & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & \text{si} \quad x \in I \backslash \{x_0\}, \\ \ell & \text{si} \quad x = x_0. \end{array} \right. \end{array}.$$

Alors $\widetilde{f}$ est continue en x_0. On l'appelle prolongement par continuité de f en x_0 (et généralement on note encore f cette fonction ainsi prolongée).

Démonstration.

□

Exemple : *La fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto x \ln(|x|)$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. Par ailleurs $\lim\limits_{x \to 0} x \ln(|x|) = 0$ (nous montrerons cela ultérieurement : il s'agit d'une croissance comparée). Ainsi on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.*

5) Limite et continuité à gauche et à droite

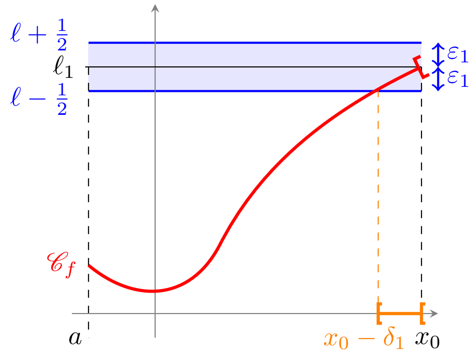
a) Limite à gauche et à droite

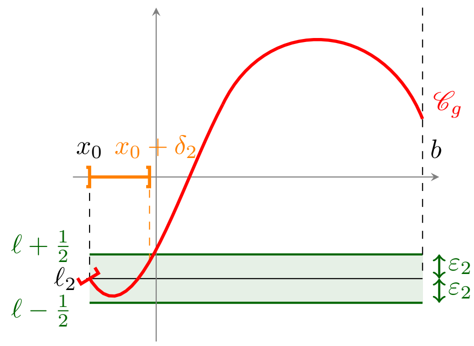
Définition (limite à gauche). *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ n'étant pas l'extrémité gauche de I. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite à gauche en x_0 (ou pour limite en x_0^-) si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap [x_0 - \delta, x_0[, \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Définition (limite à droite). *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ n'étant pas l'extrémité droite de I. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite à droite en x_0 (ou pour limite en x_0^+) si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta], \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$





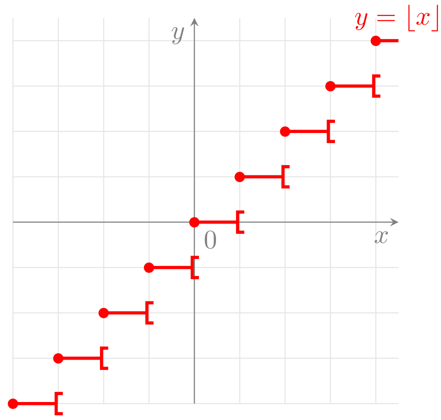
Ci-dessus $x_0 \in I$. A gauche la fonction g admet une limite à gauche en x_0. Nous avons choisi $\varepsilon_1 = 1/2$ et nous avons trouvé $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in [x_0 - \delta_1, x_0[$, les valeurs de $f(x)$ se retrouvent dans la bande bleue (i.e. $[\ell - \varepsilon_1, \ell + \varepsilon_1]$). A droite la fonction g admet une limite à droite en x_0. Nous avons choisi $\varepsilon_2 = 1/2$ et nous avons avons trouvé $\delta_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in]x_0, x_0 + \delta_2]$, les valeurs de $g(x)$ se retrouvent dans la bande verte (i.e. $[\ell - \varepsilon_2, \ell + \varepsilon_2]$).

Exemple : *La fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ admet des limites à gauche et à droite en chaque réel. Plus précisément, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,*

$$\lim_{x \to k^-} \lfloor x \rfloor = k - 1, \qquad \lim_{x \to k^+} \lfloor x \rfloor = k$$

et, pour tout $x_0 \in]k, k+1[$,

$$\lim_{x \to x_0^+} \lfloor x \rfloor = \lim_{x \to x_0^-} \lfloor x \rfloor = k.$$



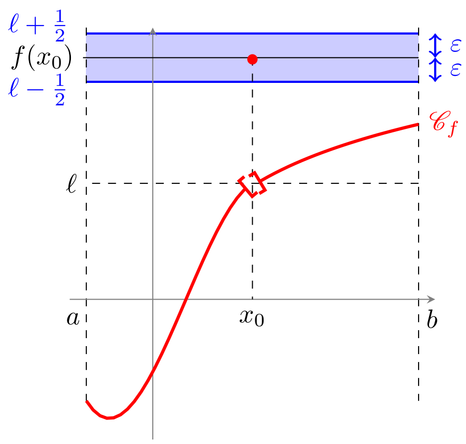
Proposition. *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou l'extrémité droite (resp. gauche) de I. Si f admet une limite à gauche (resp. à droite) en x_0, alors celle-ci est unique. On l'appelle alors la limite à droite (resp. à gauche) de f en x_0 ou encore la limite de f en x_0^+ (resp. en x_0^-).*

$\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Proposition. *Si $\ell \in \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et f est une fonction définie sur $I \backslash \{x_0\}$ à valeurs réelles, alors*

$$\lim_{x_0} f = \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x_0^+} f = \lim_{x_0^-} f = \ell.$$

$\rightsquigarrow$ EXERCICE.



Sur l'exemple ci-contre la fonction est définie sur $I = [a, b]$ avec a et b deux réels tels que $a < b$. Elle admet une limite à gauche et à droite en x_0 qui sont égales (à ℓ ici). Cependant $\ell \neq f(x_0)$. La fonction n'est pas continue en x_0.

Proposition. *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Nous avons*

$$\lim_{x_0} f = \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x_0^+} f = \lim\limits_{x_0^-} f = \ell, \\ \ell = f(x_0). \end{cases}$$

Démonstration.

$\square$

b) Continuité à gauche ou à droite en un point

Définition (continuité à gauche). *Soit x_0 un point de I qui n'est pas l'extrémité gauche de I. Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite continue à gauche x_0 si f admet $f(x_0)$ pour limite à gauche en x_0, c'est-à-dire*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap [x_0 - \delta, x_0[, \quad |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Définition (continuité à droite). *Soit x_0 un point de I qui n'est pas l'extrémité droite de I. Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite continue à droite x_0 si f admet $f(x_0)$ pour limite à droite en x_0, c'est-à-dire*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta], \quad |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Exemples :

- *La fonction partie entière est continue à droite en tout $x_0 \in \mathbb{Z}$ mais pas continue à gauche (bien qu'admettent des limites à gauche).*
- *Nous verrons au second semestre que la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle est continue à droite en tout réel et admet des limites à gauche en tout réel (mais elle n'est pas continue à gauche a priori).*

La proposition suivante est une conséquence de la proposition.

Proposition. *Soit x_0 un point de I qui n'est pas une extrémité de I. Nous avons f continue en x_0 si et seulement si f est continue à gauche et à droite en x_0.*

6) Limite infinie en un point de $\mathbb{R}$

Définition (limite infinie). *Supposons que I admette une extrémité finie x_0 qui n'appartient à pas I. On dit que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet $\underset{-\infty}{+\infty}$ pour limite en x_0 si*

$$\forall A \underset{<}{>} 0 \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \quad f(x) \underset{\leqslant}{\geqslant} A.$$

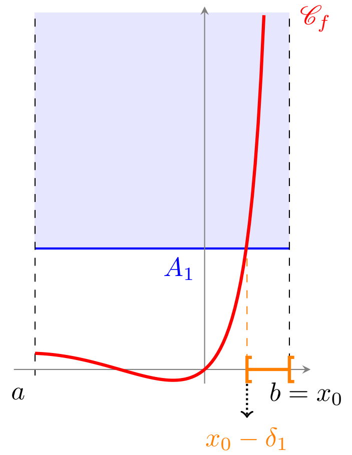
Définition (limite infinie à gauche). *Soit x_0 un point de I ou l'éventuelle extrémité droite finie de I. Soient $f : I \backslash \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f admet $\underset{-\infty}{+\infty}$ pour limite à gauche en x_0 si*

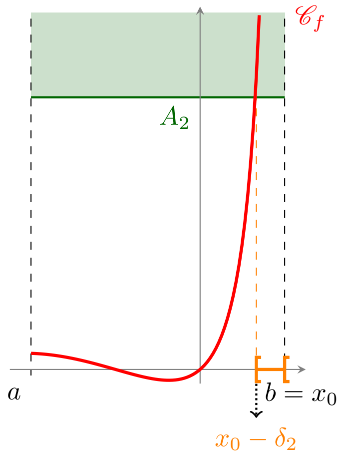
$$\forall A \underset{<}{>} 0 \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap [x_0 - \delta, x_0[, \quad f(x) \underset{\leqslant}{\geqslant} A.$$

Définition (limite infinie à droite). *Soit x_0 un point de I ou l'éventuelle extrémité gauche finie de I. Soient $f : I \backslash \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f admet $\underset{-\infty}{+\infty}$ pour limite à droite en x_0 si*

$$\forall A \underset{<}{>} 0 \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta], \quad f(x) \underset{\leqslant}{\geqslant} A.$$

Remarque : Les notations $\ell = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\ell = \lim\limits_{x_0} f$ et $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$ s'étendent au cas où $\ell = \pm\infty$.





Ci-dessus f est définie sur $I = [a, b[$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. La fonction f tend vers $+\infty$ en $x_0 = b$. A gauche, nous avons choisi $A_1 = 2$ et nous avons trouvé $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in [x_0 - \delta_1, x_0[$, les valeurs de $f(x)$ se trouvent dans la bande bleue (i.e. $[A_1, +\infty[$). A droite, nous avons choisi $A_2 = 9/2$ et nous avons avons trouvé $\delta_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in [x_0 - \delta_2, x_0[$ (un intervalle plus resserré autour de x_0 qu'à gauche), les valeurs de $f(x)$ se trouvent dans la bande verte (i.e. $[A_2, +\infty[$).

7) Limite en $\pm\infty$

Définition (limite finie en $\pm\infty$). *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $+\infty$ est une extrémité de I, alors on dit que f admet ℓ pour limite en $+\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B > 0, \quad \forall x \in I, \quad \big(x \geqslant B \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\big).$$

2. *Si $-\infty$ est une extrémité de I, alors on dit que f admet ℓ pour limite en $-\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B < 0, \quad \forall x \in I, \quad \big(x \leqslant B \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\big).$$

Proposition (unicité de la limite). *Si f admet une limite finie en $+\infty$ (resp. en $-\infty$), alors celle-ci est unique.*

$\rightsquigarrow$ Exercice.

Définition (limite infinie en $\pm\infty$). *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.*

1. *Si $+\infty$ est une extrémité de I, alors on dit que f admet $\underset{-\infty}{+\infty}$ pour limite en $+\infty$ si*

$$\forall A \underset{<}{>} 0, \quad \exists B > 0, \quad \forall x \in I, \quad \big(x \geqslant B \quad \Longrightarrow \quad f(x) \underset{\leqslant}{\geqslant} A\big).$$

2. *Si $-\infty$ est une extrémité de I, alors on dit que f admet $\underset{-\infty}{+\infty}$ pour limite en $-\infty$ si*

$$\forall A \underset{<}{>} 0, \quad \exists B < 0, \quad \forall x \in I, \quad \big(x \leqslant B \quad \Longrightarrow \quad f(x) \underset{\leqslant}{\geqslant} A\big).$$

Remarque : Les notations $\ell = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\ell = \lim\limits_{x_0} f$ et $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$ s'étendent au cas où $\ell = \pm\infty$ et où x_0 est un point de I ou un extrémité (éventuellement infinie) de I.

8) Notion d'adhérence d'un intervalle (hors programme)

Terminons par la notion d'adhérence qui n'est pas au programme mais elle est cependant usuelle et elle va nous permettre d'unifier de nombreux résultats. Nous ne rencontrerons pas cette notation en exercice et il ne faut pas l'utiliser dans une copie (à moins de la redéfinir).

Définition (adhérence). *On appelle adhérence de I, et on note $\mathcal{A}_I$, l'ensemble des éléments de I et de ses extrémités réelles ou infinies ($\pm\infty$). Un point de $\mathcal{A}_I$ est appelé point adhérent de I. Un point adhérent est donc un point de I ou une extrémité de I.*

Exemple : *L'adhérence de $I =]-1, +\infty[$ est $\mathcal{A}_I = [-1, +\infty[\cup \{+\infty\}$.*

⚠ La notation $\mathcal{A}_I$ est **personnelle** et absolument pas usuelle (la notation usuelle est plutôt $\overline{I}$ mais il y a risque de confusion avec le complémentaire de I).

Remarque : On peut résumer toutes les définitions de limite :

Soient $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $x_0 \in \mathcal{A}_I$. Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet ℓ pour limite en x_0 si et seulement si, pour tout voisinage V de ℓ, il existe un voisinage W de x_0 tel que, pour tout $x \in I \cap W$, $f(x) \in V$.

II Résultats généraux sur les limites

Dans cette partie, on se donne f une fonction définie sur I et à valeurs réelles.

1) Théorèmes de composition des limites

a) Image d'une suite convergente par une fonction

Théorème. *Soient $x_0 \in \mathcal{A}_I$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si f admet ℓ pour limite en x_0 et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de I qui converge vers x_0, alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.*

Démonstration.

□

Exemple :

Proposition. *Si f est continue en $x_0 \in I$ et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de I qui converge vers x_0, alors $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.*

⇝ Exercice.

Exemple :

b) Limite et continuité d'une fonction composée

Théorème. *Soit $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ où J est un intervalle tel que $f(I) \subset J$. Soient $x_0 \in \mathcal{A}_I$, $y_0 \in \mathcal{A}_J$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si* ☐ *et* ☐ *, alors* ☐

Démonstration.

□

Proposition. *Soit $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ où J est un intervalle tel que $f(I) \subset J$. Si f est continue en $x_0 \in I$ et si g est continue en $f(x_0)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue en x_0.*

⇝ Exercice.

2) Limites et relation d'ordre

La plupart des propositions suivantes sont analogues (et leur preuve aussi) à celles sur les suites admettant une limite.

Proposition. *Si f admet une limite finie en $x_0 \in \mathcal{A}_I$, alors f est bornée sur un voisinage de x_0 dans I.*

Démonstration. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ la limite finie de f en x_0. Supposons que $x_0 \in I$ (les autres cas se traitent de façon analogue).

□

Proposition. *Supposons que f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en $x_0 \in \mathcal{A}_I$. Si a et b sont deux réels tels que $a < \ell < b$, alors il existe un voisinage V de x_0 tel que, pour tout $x \in I \cap V$, $f(x) \in]a, b[$.*

Démonstration.

□

Corollaire. *Si f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ ou $+\infty$ (resp. $\ell \in \mathbb{R}_-^*$ ou $-\infty$) en $x_0 \in \mathcal{A}_I$, alors il existe un voisinage V de x_0 tel que, pour tout $x \in V$, $f(x) > 0$ (resp. $f(x) < 0$).*

Les deux résultats précédents permettent de transférer des propriétés d'ordre sur la limite aux images de la fonction (sur un voisinage). Nous allons voir que des propriétés d'ordre sur la fonction se transfèrent sur la limite.

Théorème (passage à la limite). *Soit $x_0 \in \mathcal{A}_I$. Supposons que f admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en x_0. Soit $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant une limite $\ell' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en x_0. Si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in I$, alors $\ell \leqslant \ell'$.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de I qui converge vers x_0. Le théorème entraîne que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et $(g(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ'. Nous avons $f(u_n) \leqslant g(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite dans l'inégalité, nous obtenons $\ell \leqslant \ell'$. On aurait bien sûr pu faire une preuve directe. □

Remarques :

- La conclusion du théorème est toujours vraie si $f(x) \leqslant g(x)$ dans un voisinage de x_0.
- ⚠ Pour utiliser ce théorème on doit auparavant avoir montré la convergence des suites.
- ⚠ Il n'y a pas conservation des inégalités strictes : si $f(x) < g(x)$ pour tout $x \in I$, alors on peut seulement conclure que $\ell \leqslant \ell'$.

  Par exemple, considérons $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto 1 - \dfrac{1}{x}$ et $g : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto 1 + \dfrac{1}{x}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) < g(x)$. Pourtant f et g admettent tous les deux 1 pour limite en $+\infty$.

Corollaire. *Soit $m \in \mathbb{R}$. Supposons que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en $x_0 \in \mathcal{A}_I$.*

1. *Supposons que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant m$. Alors $\ell \leqslant m$.*
2. *Supposons que, pour tout $x \in I$, $m \leqslant f(x)$. Alors $m \leqslant \ell$.*

Théorème (théorème d'encadrement). *Soient $x_0 \in \mathcal{A}_I$. Soient f, g et h trois fonctions définies sur I et à valeurs réelles. Supposons que*

- *Pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.*
- *Les fonctions f et h admettent $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en x_0.*

Alors g admet ℓ pour limite en x_0.

Démonstration.

□

Corollaire. *Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathcal{A}_I$. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$.*

1. *Si pour tout $x \in I$, $|f(x) - \ell| \leqslant g(x)$, alors $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell$.*
2. *Si f est bornée sur I, alors $f(x)g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$.*

Théorème. *Soient $x_0 \in \mathcal{A}_I$. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$.*

1. *Si f admet $+\infty$ pour limite en x_0, alors g aussi.*
2. *Si g admet $-\infty$ pour limite en x_0, alors f aussi.*

$\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Remarque : Tous les résultats de ce paragraphe restent vrais si les propriétés d'ordre n'ont lieu qu'au voisinage de x_0 et pas forcément sur I tout entier (il suffit de restreindre I au voisinage en question).

3) Opérations algébriques sur les limites

Définition. *Soit $x_0 \in \mathcal{A}_I$.*

- *On dit que $f(x)$ admet 0^+ pour limite en x_0 et on note $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0^+$ si f admet 0 pour limite en x_0 et est strictement positive sur un voisinage de x_0.*
- *On dit que $f(x)$ admet 0^- pour limite en x_0 et on note $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0^-$ si f admet 0 pour limite en x_0 et est strictement négative sur un voisinage de x_0.*

Proposition. *Soient ℓ et ℓ' des réels. Soit $x_0 \in \mathcal{A}_I$. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur I et admettant des limites en x_0.*

On parle de forme indéterminée (et on note F.I.) lorsqu'on ne peut pas déterminer la limite d'une opération sur les fonctions (du moins de manière générale).

***cf. formulaire* Opérations sur les limites.**

DÉMONSTRATION. Montrons par exemple que $\dfrac{1}{g}$ tend vers $\dfrac{1}{\ell'}$ en $x_0 \in I$ dans le cas où $\ell' \neq 0$.

Remarque : Rappelons qu'il y a quatre types principaux de formes indéterminées : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\dfrac{0}{0}$ et $\dfrac{\infty}{\infty}$. Dans ce cas, il faut faire une étude au cas par cas.

4) Opérations algébriques sur les fonctions continues en un point

Nous déduisons des opérations algébriques sur les limites celles sur les fonctions continues en un point.

Proposition. *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues en $x_0 \in I$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions*

$$|f|, \qquad \lambda|f|, \qquad f+g \qquad \text{et} \qquad fg$$

sont continues en x_0. De plus, si $g(x_0) \neq 0$, alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues en x_0.

III Le théorème de la limite monotone pour les fonctions

La monotonie d'une fonction (qui est une propriété globale, *c.f* le prochaine chapitre) permet de montrer l'existence de limites.

Proposition/Définition. *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

- *Si* f *est majorée sur* I*, alors l'ensemble* $f(I) = \{f(x) \,|\, x \in I\}$ *est non vide est majoré. Il admet donc une borne supérieure que l'on note* $\sup\limits_{x\in I} f(x)$ *ou* $\sup\limits_{I} f$.
- *Si* f *est minorée sur* I*, alors l'ensemble* $f(I) = \{f(x) \,|\, x \in I\}$ *est non vide est minoré. Il admet donc une borne inférieure que l'on note* $\inf\limits_{x\in I} f(x)$ *ou* $\inf\limits_{I} f$.

Théorème (théorème de la limite monotone). *Soit* f *une fonction croissante sur* $]a, b[$*, avec* $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

1. *Si* f *est majorée sur* $]a, b[$*, alors* f *admet une limite finie en* b *et cette limite est* $\boxed{}$.
   Sinon f *admet* $+\infty$ *pour limite en* b.
2. *Si* f *est minorée sur* $]a, b[$*, alors* f *admet une limite finie en* a *et cette limite est* $\boxed{}$.
   Sinon f *admet* $-\infty$ *pour limite en* a.
3. *Pour tout* $x_0 \in]a, b[$*,* f *admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite. De plus*

$$\boxed{}$$

Remarque : Nous avons des résultats analogues quand f est décroissante (remplacer f par $-f$).

Démonstration.

□

IV Asymptotes et branches paraboliques

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Notons $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

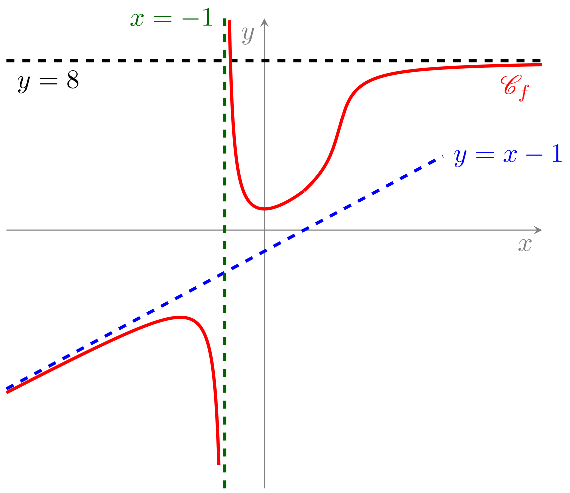
Définition (asymptotes).

- *Soit $x_0 \in \mathbb{R}\backslash I$ une extrémité de I. Si f admet $\pm\infty$ pour limite en x_0, on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$ en x_0. On dit aussi que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées en x_0.*
- *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Si I n'est pas majorée (resp. minorée) et si*

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0 \qquad \left(\text{resp.} \quad \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0\right),$$

on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).
  - *Si $a \neq 0$, on parle d'asymptote oblique.*
  - *Si $a = 0$, on parle d'asymptote horizontale. On dit aussi que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote parallèle à l'axe des abscisses en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).*

Remarque : Dans le deuxième cas, on peut également être amené à étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote. Pour cela on étudie le signe de $f(x) - ax - b$ selon le cas. Si le signe est positif alors la courbe est au-dessus, sinon elle est en-dessous.



Dans l'exemple ci-contre, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet :

- *la droite d'équation $y = x - 1$ pour asymptote oblique en $-\infty$,*
- *la droite d'équation $y = 8$ pour asymptote horizontale en $+\infty$,*
- *la droite d'équation $x = -1$ pour asymptote verticale en -1.*

L'étude branche parabolique est à la limite du programme. Elles sont utiles pour le tracé de courbes représentatives de fonctions.

Définition (branches paraboliques). *Supposons que I n'est pas majorée et que f admette $\pm\infty$ pour limite en $+\infty$.*

- *Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $-\infty$, on dit que $\mathscr{C}_f$ présente une branche parabolique (de direction) verticale en $+\infty$.*
- *Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on dit que $\mathscr{C}_f$ présente une branche parabolique (de direction) horizontale en $+\infty$.*
- *Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$ et si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - ax\big) = +\infty$ ou $-\infty$, alors on on dit que $\mathscr{C}_f$ présente une branche parabolique en $+\infty$ de direction parallèle à la droite d'équation $y = ax$.*

V Continuité en un point et limites de fonctions usuelles

Théorème.

1. *La fonction $x \longmapsto |x|$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.*
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.*
3. *Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^q}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.*
4. *Les fonctions polynomiales sont continues en tout point de $\mathbb{R}$. Les fonctions rationnelles sont continues en tout point de leur ensemble de définition.*
5. *Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont continues en tout réel. La fonction $\tan$ est continue en tout point de $\mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.*
6. *La fonction $\exp$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.*
7. *La fonction $\ln$ est continue en tout point de $\mathbb{R}_+^*$.*

Démonstration. Le premier point découle de l'inégalité triangulaire renversée. Le deuxième s'obtient ensuite par récurrence. Les points 3 et 4 découlent des deux premiers par opérations algébriques. $\rightsquigarrow$ Exercice.

5. Rappelons que $|\sin(h)| \leqslant |h|$ pour tout $h \in \mathbb{R}$ (*cf.* formules trigonométriques).

Enfin le point 6 a été montré dans le DM n° 5 et nous montrerons le septième dans le DM n° 8. □

Théorème. *1.* $\lim\limits_{x \to +\infty} |x| = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} |x| = +\infty$.

2. *Si* $n \in \mathbb{N}^*$, *alors* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$
3. *Si* $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$, *alors* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = 0$.
4. *Si* $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$, *alors* $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to 0^-} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$
5. *Si* $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$, *alors* $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.
6. *Si P est une fonction polynomiale de degré p et de coefficient dominant a_p, alors elle possède les mêmes limites en $\pm\infty$ que la fonction $x \longmapsto a_p x^p$.*
7. *Si Q est une fonction polynomiale de degré q et de coefficient dominant b_q, alors la fonction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ possède les mêmes limites en $\pm\infty$ que la fonction $x \longmapsto \dfrac{a_p}{b_q} x^{p-q}$.*
8. *Pour tout* $k \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x \to (-\frac{\pi}{2} + k\pi)^+} \tan(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2} + k\pi)^-} \tan(x) = +\infty$.
9. *Nous avons* $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

Démonstration. Nous laissons les points 1,2,3,4,5,8 en exercice. Nous montrerons le point 9 dans le DM n° 8. Montrons le point 7 (le 6 en est un cas particulier) : supposons que $P : x \longmapsto \sum\limits_{k=0}^{p} a_k x^k$ et $Q : x \longmapsto \sum\limits_{k=0}^{q} b_k x^k$.

Rappelons enfin quelques limites utilisant le taux d'accroissement et les croissances comparées (que nous montrerons dans le chapitre *Dérivation*) :

Proposition. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ *et* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x - 1} = 1$.

Théorème (croissances comparées pour les fonctions).

1. *Pour tout* $(\alpha, \beta) \in]0, +\infty[^2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$.
2. *Pour tout* $(\alpha, \beta) \in]0, +\infty[^2$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0$.
3. *Pour tous* $a \in]1, +\infty[$ *et* $\gamma \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\gamma}{a^x} = 0$.
4. *Pour tous* $a \in]1, +\infty[$ *et* $\gamma \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x |x|^\gamma = 0$.