# III Lois finies usuelles

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

## 1) Loi certaine

**Définition.** *On dit qu'une variable aléatoire réelle finie $X$ sur $\Omega$ suit une loi certaine si*

*La réel $a$ est appelé le paramètre de la loi.*

**Remarque :** Par abus de notation, on considère en général que $X(\Omega) = \{a\}$. En fait il se peut que $X$ prennent d'autres valeurs mais avec une probabilité nulle.

**Proposition.** *Si $X$ suit la loi certaine de paramètre $a \in \mathbb{R}$, alors $\mathbb{E}(X) =$ et $\mathbb{V}(X) =$ .*

Démonstration.

□

**Théorème (caractérisation de la loi certaine).** *Soit $X$ est une variable aléatoire réelle finie sur $\Omega$. Alors $\mathbb{V}(X) = 0$ si et seulement si $X$ suit une loi certaine.*

Démonstration.

□

## 2) Loi uniforme

**Définition.** *Soit $A$ une partie finie de $\mathbb{R}$. On dit qu'une variable aléatoire réelle finie $X$ sur $\Omega$ suit la loi uniforme sur $A$ si et*

*On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(A)$.*

**Remarques :**

- La loi uniforme est la loi que l'on rencontre dans les situations d'équiprobabilité : toutes les valeurs prises par une variable aléatoire $X$ qui suit une loi uniforme sont équiprobables.
- La construction de la fonction de répartition et du diagramme en bâton est laissée en exercice. Nous reverrons cela lors des séances de TP avec Scilab.

***Exemples :***

- *On lance un dé équilibré à 6 faces. La variable aléatoire $X$ qui donne le résultat obtenu suit la loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$.*
- *On dispose d'une urne contenant $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On tire une boule au hasard. La variable aléatoire $X$ qui donne le numéro de la boule tirée suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.*

**Proposition.** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Si* $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$, *alors*

$$\mathbb{E}(X) = \boxed{\phantom{xxxx}} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \boxed{\phantom{xxxx}}.$$

Démonstration.

□

**Corollaire.** *Soient* $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ *tel que* $a \leqslant b$. *Si* $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,b-a+1]\!])$, *alors* $Y = X + a - 1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$. *En particulier*

$$\mathbb{E}(Y) = \boxed{\phantom{xxxx}} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(Y) = \boxed{\phantom{xxxxxxxx}}.$$

Démonstration.

□

## 3) Loi de Bernoulli

**Définition.** *Soit* $p \in \,]0,1[$. *On dit qu'une variable aléatoire réelle finie* $X$ *sur* $\Omega$ *suit la loi de Bernoulli de paramètre* $p$ *si* $\boxed{\phantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx}}$.

*On note* $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. *La paramètre* $p$ *(resp.* $q = 1-p$*) est appelé probabilité de succès (resp. d'échec).*

**Remarques :**

- La loi de Bernoulli est la loi que l'on rencontre lorsqu'il n'y a que deux issues possibles à une expérience : succès et échec. En général on code le succès par la valeur $1$ et l'échec par la valeur $0$. On peut dans tous les cas s'y ramener facilement : si $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a < b$ et si $X$ est une variable aléatoire réelle finie qui ne prend que les valeurs $a$ et $b$ (avec probabilités non nulles), alors $Y = \dfrac{X-a}{b-a} \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ avec $p = \mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X=b)$.
- La fonction de répartition d'une v.a. $X$ de loi de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0,1[$ est

$$F_X : t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0, \\ 1-p & \text{si} \quad 0 \leqslant t < 1, \\ 1 & \text{si} \quad t \geqslant 1. \end{cases}$$

  La construction de la fonction de répartition et du diagramme en bâton est laissée en exercice. Nous reverrons cela lors des séances de TP avec Scilab.

***Exemples :***

- *On lance une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité qu'elle tombe sur Pile soit $p \in ]0,1[$. Soit $X$ la variable aléatoire qui vaut $1$ si la pièce tome sur Pile et $0$ si elle tombe sur face. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.*
- *Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $X^2 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.*
- *On tire 5 cartes au hasard d'un jeu de 52 cartes. On note $X$ la variable aléatoire égale à $1$ s'il y a un trèfle, $0$ s'il n'y en a pas. Un univers associé à cette expérience est $\Omega$ l'ensemble des tirages possibles. On munit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de l'équiprobabilité $\mathbb{P}$ sur $\Omega$.*

**Proposition.** *Soit $p \in ]0,1[$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors*

$$\mathbb{E}(X) = \boxed{\phantom{xx}} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \boxed{\phantom{xxxx}}.$$

Démonstration.

$\square$

***Exemple :***

## 4) Loi binomiale

**Définition.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in ]0,1[$. On dit qu'une variable aléatoire réelle finie $X$ sur $\Omega$ suit la loi de binomiale de paramètres $n$ et $p$ si* $\boxed{\phantom{xxxxxx}}$ *et*

$$\boxed{\phantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx}}$$

*On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. La paramètre $p$ (resp. $q = 1-p$) est appelé probabilité de succès (resp. d'échec).*

**Remarques :**

- Avec la formule du binôme de Newton, on vérifie que

$$\boxed{\phantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx}}$$

- $\mathcal{B}(1,p)$ est la loi de Bernoulli de paramètre $p$.
- La construction de la fonction de répartition et du diagramme en bâton est laissée en exercice. Nous reverrons cela lors des séances de TP avec Scilab.

**Proposition.** *On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est $p \in ]0,1[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons $X$ la variable aléatoire comptant le nombre de succès dans $n$ répétitions indépendantes de cette épreuve de Bernoulli. Alors $X$ suit la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.*

Démonstration.

Ainsi, pour montrer qu'une v.a. $X$ suit une loi binomiale, on a deux possibilités :

- Soit on calcule explicitement la loi de $X$ : on montre que
  - il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$,
  - il existe $p \in ]0,1[$ tel que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$.

  La v.a. $X$ suit alors la loi $\mathcal{B}(n, p)$.
- Soit on justifie que $X$ compte le nombre de succès dans $n$ répétitions indépendantes d'épreuves de Bernoulli de paramètre de succès $p$.

  Il est impératif de justifier que les épreuves de Bernoulli sont indépendantes !

***Exemples :***

- *On dispose d'une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité qu'elle tombe sur Pile soit $p \in ]0,1[$. On lance $n \in \mathbb{N}^*$ fois la pièce successivement et on note $X$ le nombre de fois où la pièce est tombée sur Pile. On peut supposer que les lancers successifs sont indépendants. La variable aléatoire $X$ représente alors le nombre de succès dans $n$ répétitions indépendantes d'épreuves de Bernoulli. Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.*
- *On dispose d'une urne contenant $r$ boules rouges et $b$ boules bleues (avec $r \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$). On effectue $n$ tirages successifs avec remise de boules dans l'urne et on note $X$ le nombre de boules rouges obtenues. On peut supposer que les tirages successifs sont indépendants. Tirer une boule rouge dans l'urne est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{r}{r+b}$. La variable $X$ compte le nombre de succès dans $n$ répétitions indépendantes de cette épreuve de Bernoulli. Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \dfrac{r}{r+b}\right)$.*

**Proposition.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in ]0,1[$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors*

$$\mathbb{E}(X) = \boxed{\qquad} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \boxed{\qquad\quad}.$$

Démonstration.