Chapitre 10

Variables aléatoires réelles finies

Lorsqu'on étudie un phénomène, on est amené à étudier des variables, des grandeurs numériques liées à ce phénomène. De façon informelle, une variable aléatoire réelle est un nombre lié à une expérience aléatoire dont la valeur dépend exclusivement du résultat ω de cette expérience. Mathématiquement, une variable aléatoire est donc une fonction à valeurs réelles définie sur l'univers Ω associé à l'expérience.

Quelques exemples de variables aléatoires :

- la somme des chiffres obtenus en lançant deux dés.
- le nombre moyen d'appels reçus par un standard téléphonique en une heure.
- la durée de vie d'une ampoule.

Pour le moment on se limite aux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé fini. Dans tout ce chapitre, Ω désigne un univers fini.

I Variable aléatoire réelle finie

1) Définitions et exemples

Définition. *Soit* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ *un espace probabilisable fini. Une variable aléatoire réelle finie sur* Ω *est une application* X *définie sur* Ω *et à valeurs réelles.*

L'ensemble $X(\Omega) = \{X(\omega) \,|\, \omega \in \Omega\}$ *est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire* X*. On l'appelle univers image de* X

Remarques :

- Cette définition n'est valable que dans le cas des univers finis. Nous verrons au second semestre la notion de variables aléatoires réelles sur des espaces probabilisables quelconques.
- Si Ω est finie, alors $X(\Omega)$ est fini et $\mathrm{card}(X(\Omega)) \leqslant \mathrm{card}(\Omega)$.
- Dans « variable aléatoire réelle finie », l'adjectif
  - « réelle » désigne le fait que la variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.
  - « fini » désigne le fait que l'ensemble des valeurs prises par X est fini.

  Nous verrons au second semestre que l'on peut définir une variable aléatoire réelle finie sur un espace probabilisable qui n'est pas fini.
- Pour abréger, on pourra écrire *v.a.r.* au lieu de *variable aléatoire réelle*.

Exemples :

Définition. *Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et X une variable aléatoire réelle finie sur Ω. On définit alors les événements suivants :*

$$[X = a] = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = a\}, \qquad [X > a] = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) > a\},$$
$$[X < a] = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) < a\}, \qquad [X \geqslant a] = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \geqslant a\},$$
$$[X \leqslant a] = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leqslant a\}, \qquad [a \leqslant X \leqslant b] = \{\omega \in \Omega \,|\, a \leqslant X(\omega) \leqslant b\},$$
$$\dots$$

Plus généralement, si A est une partie de $\mathbb{R}$, alors on note $[X \in A] = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in A\}$.

Remarques :

- Ces définitions permettent en quelque sorte d'« oublier » l'espace probabilisable sur lequel est définie la variable aléatoire X, et de voir X comme un nombre aléatoire. Le plus souvent on ne précisera pas l'univers et on définira les variables aléatoires par des phrases.

  Par exemple : on lance deux dés et on note X la somme des chiffres des deux faces obtenues.

- Supposons que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Exemple : *Reprenons l'exemple précédent où X est la variable aléatoire représentant la somme des chiffres des faces obtenues par le lancer de deux dés à 6 faces (définie sur l'univers $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ muni de la probabilité uniforme). Nous avons, par exemple*

Proposition (Système complet associé à une variable aléatoire réelle finie). *Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini X est une variable aléatoire réelle finie sur Ω. La famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. On l'appelle le système complet associé à X.*

Remarque : Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors le système complet associé à X est $([X = x_i])_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Démonstration.

$\square$

Exemple : *On lance trois fois une pièce de monnaie. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de Pile obtenus.*

2) Loi d'une variable aléatoire finie

Définition. *Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X est une variable aléatoire réelle finie sur Ω. On appelle loi (de probabilité) de X l'application* $\mathscr{L}_X \ : \ \begin{array}{rcl} X(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}([X=x]) \end{array}$.

Remarques :

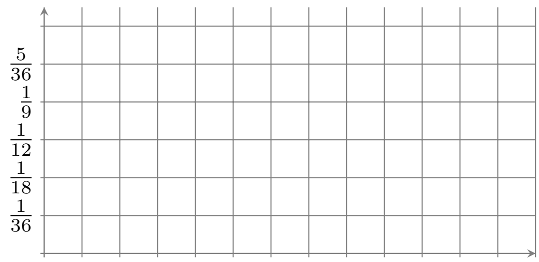
- Autrement dit, la loi d'une v.a. réelle finie X est la donnée de $X(\Omega)$ et des probabilités $\mathbb{P}([X=x])$ pour tout $x \in X(\Omega)$.
- Pour abréger, on note $\mathbb{P}(X \in A)$, $\mathbb{P}(X = x)$, $\mathbb{P}(X < x)$, ... au lieu de $\mathbb{P}([X \in A])$, $\mathbb{P}([X = x])$, $\mathbb{P}([X < x])$, ...
- Pour représenter la loi d'une variable aléatoire réelle finie X, on peut
  - dresser un tableau faisant correspondre $\mathbb{P}(X = x)$ et x, pour chaque $x \in X(\Omega)$.
  - construire un diagramme en bâtons (pour chaque $x \in X(\Omega)$, on trace un bâton de longueur $\mathbb{P}(X = x)$ situé à l'abscisse x).
  - donner une formule générale pour $\mathbb{P}(X = x)$, $x \in X(\Omega)$.

Exemple : *Reprenant l'exemple de la variable aléatoire X donnant la somme des chiffres obtenus lors du lancer de deux dés à six faces (définie sur l'univers $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ muni de la probabilité uniforme). Déterminons sa loi :*

On peut résumer cela dans le tableau :

x											
$\mathbb{P}(X=x)$											

ou via le diagramme en bâtons :



Définition. *Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles finies toutes deux définies sur des espaces probabilisés (pas forcément les mêmes) qui ont la même loi (i.e $\mathscr{L}_X = \mathscr{L}_Y$), alors on note $X \overset{\mathscr{L}}{=} Y$.*

Exemple : *On lance une pièce de monnaie bien équilibrée et on pose $X = 1$ si la pièce tombe sur Pile et $X = 0$ si elle tombe sur Face (définie par exemple sur $\Omega_1 = \{0, 1\}$ muni de la probabilité uniforme). On lance un dé à 6 faces bien équilibré et on pose $Y = 1$ si le chiffre de la face obtenue est pair et $Y = 0$ s'il est impair (définie sur $\Omega_2 = [\![1,6]\!]$ muni de la probabilité uniforme).*

Proposition. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Si X est une variable aléatoire réelle finie sur Ω, alors*

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1.$$

Démonstration. Cela découle du fait que $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. □

Remarques :

- En particulier, cela entraîne qu'il existe $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) > 0$.
- Si $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$.

Théorème. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Soit $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie de réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Alors il existe un espace probabilité fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et une variable aléatoire réelle finie X sur Ω telle que*

et

Démonstration. On considère $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$, X l'application identité de Ω et $\mathbb{P} : A \in \mathcal{P}(\Omega) \longmapsto \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ x_i \in A}} p_i$.

Les conditions sur $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ entraînent que $\mathbb{P}$ est bien une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. On a bien $X(\Omega) = \Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$ et, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(\{x_i\}) = p_i$. $\square$

Remarques :

- Autrement dit, il existe une variable aléatoire de loi $\mathscr{L}_X : \begin{array}{ccc} \{x_1, \dots, x_n\} & \longrightarrow & [0,1] \\ x_i & \longmapsto & p_i \end{array}$.
- Forcément, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $p_i \in [0, 1]$.
- Il n'y a unicité ni de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, ni de la variable aléatoire X.
- ⚠ A priori Ω peut comporter des événements élémentaires de probabilité nulle et, dans ce cas, il se peut que la probabilité que X prenne certaines valeurs de $X(\Omega)$ soit nulle. Mais en général on suppose que Ω est tel que, pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x) > 0$.

Exemple :

Définition. *Si $\mathscr{L}$ est une application définie sur un sous-ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \mathscr{L}(x_i) = 1$, alors on dit que $\mathscr{L}$ est une loi de probabilité finie sur $\mathbb{R}$ de support $\{x_1, \dots, x_n\}$.*

Si X est une variable aléatoire réelle finie dont la loi est $\mathscr{L}$, alors on dit que X suit la loi $\mathscr{L}$ et on note $X \hookrightarrow \mathscr{L}$.

3) Fonction de répartition d'une variable aléatoire finie

Définition. *Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle finie sur Ω. L'application*

est appelée fonction de répartition de X.

Exemple : *Reprenant l'exemple de la variable aléatoire X donnant la somme des chiffres des faces obtenues par le lancer de deux dés à 6 faces (définie sur l'univers $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ muni de la probabilité uniforme). Traçons la courbe de F_X, sa fonction de répartition :*