Chapitre 1

Logique et raisonnements

I Éléments de logique

1) Proposition

Définition. *Une proposition (ou assertion, ou prédicat) est un énoncé mathématique qui est soit vrai, soit faux. On note V et F (ou encore 1 et 0) les deux valeurs logiques possibles d'une proposition.*
Par convention, quand on énonce une proposition, c'est que l'on affirme qu'elle est vraie.

Exemples : • *Quelques propositions vraies :*
- *La Terre fait partie du système solaire.*
- *L'entier 24 est un multiple de 3.*
- *La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$.*

• *Quelques propositions fausse :*
- *Tous les chats sont gris.*
- *L'entier 25 est un multiple de 3.*
- *Il existe un réel x tel que $x^2 = -1$.*

Définition. *Un axiome est une proposition que l'on suppose vraie a priori (et que l'on ne cherche pas à démontrer).*

Exemple : *La proposition « Par un point extérieur à une droite, il passe une et une seule droite parallèle à cette droite » est un axiome appelé cinquième axiome d'Euclide.*

A part les axiomes, la véracité (ou la fausseté) d'une proposition doit résulter d'une démonstration (ou preuve) : elle s'appuie sur des hypothèses, sur des axiomes, sur des propositions démontrées précédemment et sur les règles de logique (que nous allons voir en détail dans ce chapitre).

Définition.
- *Un théorème est une proposition vraie qui désigne en général une proposition particulièrement importante.*
- *Un lemme est une proposition vraie qui est un résultat préliminaire utile à la démonstration d'une proposition plus importante.*
- *Un corollaire est une proposition vraie qui est la conséquence (souvent immédiate) d'une autre proposition vraie.*
- *Une conjecture est une proposition dont on pense qu'elle est vraie, sans en avoir de preuve.*

Exemples :
- *Le théorème de Pythagore est la proposition : « Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés adjacents à l'angle droit ».*
- *La conjecture de Goldbach est la proposition non démontrée[1] qui s'énonce comme suit : « Tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers ».*

2) Propositions équivalentes

Définition (propositions équivalentes). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La proposition « $\mathcal{A}$ est équivalente à $\mathcal{B}$ » est la proposition notée $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ et définie par la table de vérité ci-contre.*

Si la proposition $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est vraie, on dit que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont équivalentes. Autrement dit, deux propositions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont équivalentes lorsqu'elles sont simultanément vraies ou bien simultanément fausses.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Remarques :
- On dit aussi que deux propositions équivalentes sont deux propositions qui ont les mêmes valeurs de vérité, dans la table de vérité.
- L'équivalence joue pour les propositions le rôle que joue l'égalité pour les nombres. Par exemple les expressions $1+2$ et 3 sont différentes et pourtant on écrit $1+2=3$. De façon analogue, si x est un réel, les propositions « $x^2 = 1$ » et « $x = 1 \text{ ou } x = -1$ » ne sont pas identiques et pourtant on écrit $(x^2 = 1) \;\Leftrightarrow\; (x = 1 \text{ ou } x = -1)$.

1. Selon *Wikipedia*, la conjecture de Goldbach est vérifiée pour tous les entiers pairs jusqu'à $4 \cdot 10^{18}$... de quoi penser qu'elle doit être vraie, mais il n'y a pas de preuve à ce jour.

3) Négation d'une proposition

Définition (négation). *La négation d'une proposition $\mathcal{A}$ est la proposition notée* $\text{non } \mathcal{A}$ *ou* $\neg\mathcal{A}$ *et définie par la table de vérité ci-contre.*

Autrement dit, $\text{non } \mathcal{A}$ *est la proposition qui est vraie quand* $\mathcal{A}$ *est fausse et qui est fausse quand* $\mathcal{A}$ *est vraie.*

$\mathcal{A}$	$\text{non } \mathcal{A}$
V	
F	

Exemples :

Proposition. *Soit $\mathcal{A}$ une proposition. Nous avons* $\text{non}(\text{non } \mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$.

Démonstration. On constate que $\text{non}(\text{non } \mathcal{A})$ et $\mathcal{A}$ ont les mêmes valeurs de vérité. □

4) Conjonction et disjonction de propositions

Définition (conjonction). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions.*

La conjonction $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ *est la proposition définie par la table de vérité ci-contre.*

Autrement dit, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ *est la proposition qui est vraie quand les propositions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies toutes les deux et qui est fausse quand l'une des deux au moins est fausse.*

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Exemple :

Définition (disjonction). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions.*

La disjonction $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ *est la proposition définie par la table de vérité ci-contre.*

Autrement dit, $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ *est la proposition qui est vraie quand l'une des propositions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, ou les deux, sont vraies et qui est fausse quand les deux sont fausses.*

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Remarque : Le ou mathématique est le « ou » inclusif, c'est-à-dire que la proposition ($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) est vraie même si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies en même temps (contrairement au « ou » exclusif qui signifie « soit l'un, soit l'autre » et qui est celui que l'on utilise généralement dans le langage courant).

Exemples :

Proposition. *Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois propositions. Les propositions suivantes sont toujours vraies :*

- $\mathcal{A}$ ou (non $\mathcal{A}$) *(tiers exclu)*
- ($\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$) $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ *(idempotence du* et*),*
- ($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{A}$) $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ *(idempotence du* ou*),*
- ($\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$) $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{B}$ et $\mathcal{A}$) *(commutativité du* et*),*
- ($\mathcal{B}$ ou $\mathcal{A}$) $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) *(commutativité du* ou*),*
- (($\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$) et $\mathcal{C}$) $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{A}$ et ($\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$)) *(associativité du* et*)*
- (($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) ou $\mathcal{C}$) $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{A}$ ou ($\mathcal{B}$ ou $\mathcal{C}$)) *(associativité du* ou*),*
- (($\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$) ou $\mathcal{C}$) $\Leftrightarrow$ (($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{C}$) et ($\mathcal{B}$ ou $\mathcal{C}$)) *(distributivité de* ou *sur* et*),*
- (($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) et $\mathcal{C}$) $\Leftrightarrow$ (($\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$) ou ($\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$)) *(distributivité de* et *sur* ou*).*

⇝ Exercice.

Proposition (lois de Morgan). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions.*

- *La proposition* non($\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$) *est équivalente à la proposition* (non $\mathcal{A}$) ou (non $\mathcal{B}$).
- *La proposition* non($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) *est équivalente à la proposition* (non $\mathcal{A}$) et (non $\mathcal{B}$).

DÉMONSTRATION. • On constate que $\text{non}(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B})$ et $((\text{non } \mathcal{A}) \text{ ou } (\text{non } \mathcal{B}))$ ont les mêmes valeurs de vérité :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\text{non}(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B})$	$\text{non } \mathcal{A}$	$\text{non } \mathcal{B}$	$(\text{non } \mathcal{A}) \text{ ou } (\text{non } \mathcal{B})$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

- On montre de même que $\text{non}(\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B})$ et $\big((\text{non } \mathcal{A}) \text{ et } (\text{non } \mathcal{B})\big)$ ont les mêmes valeurs de vérité. □

Exemple : *On lance un dé à 6 faces et on considère $\mathcal{A}$ la proposition « le chiffre obtenu est pair » et $\mathcal{B}$ la proposition « le chiffre obtenu est strictement supérieur à 3 ».*

5) Implication

a) Définition de l'implication

Définition (implication). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions.*

La proposition « $\mathcal{A}$ implique $\mathcal{B}$ » est la proposition notée $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ et définie par la table de vérité ci-contre.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Pour exprimer que la proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie, on dit indifféremment :

- *Si $\mathcal{A}$ (est vraie), alors $\mathcal{B}$ (est vraie).*
- *$\mathcal{A}$ est une condition suffisante de $\mathcal{B}$.*
- *Pour que $\mathcal{A}$ (soit vraie), il faut que $\mathcal{B}$ (soit vraie).*
- *$\mathcal{B}$ est une condition nécessaire de $\mathcal{A}$.*
- *Pour que $\mathcal{B}$ (soit vraie), il suffit que $\mathcal{A}$ (soit vraie).*

Exemples :

- *Considérons les propositions $\mathcal{A}$: « Il pleut » et $\mathcal{B}$: « Le sol (de la rue) est mouillé ». On est d'accord que si « il pleut », alors « le sol est mouillé ». Ainsi la proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie. On peut dire aussi :*
  - *« Il pleut » est une condition ____ pour que le sol de la rue soit mouillé. Mais elle n'est pas ____ (car le sol sera aussi mouillé si un employé municipal vient de le nettoyer...)*
  - *Pour qu'il pleuve, il ____ que le sol soit mouillé.*
  - *« Le sol est mouillé » est une condition ____ pour qu'il pleuve.*
  - *Pour que le sol soit mouillé, il ____ qu'il pleuve.*
- *Soit f une fonction définie sur un intervalle I est à valeurs réelles.*
  - *La proposition « f est continue » est une condition ____ de la proposition « f est dérivable ». Mais elle n'est pas ____ (car la fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$ mais pas dérivable en 0).*
  - *Pour que f soit continue, il ____ que f soit dérivable.*
  - *La proposition « f est dérivable » est une condition ____ de la proposition « f est continue ». Mais elle n'est pas ____.*
  - *Pour que f soit dérivable, il ____ que f soit continue.*
- *Soient A, B et C trois points du plan. Considérons les propositions $\mathcal{P}$: « Le triangle ABC est rectangle en A » et $\mathcal{Q}$: « $BC^2 = AC^2 + AB^2$ ». L'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie (il s'agit du théorème de Pythagore).*

Remarques :

- La proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est fausse uniquement si $\mathcal{A}$ est vraie tandis que $\mathcal{B}$ est fausse. En particulier, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie dans le cas où $\mathcal{A}$ est fausse. Cela peut sembler curieux au premier abord : l'usage courant du *Si... alors...* peut en effet porter à confusion. Une implication est le *Si... alors...* que l'on utilise pour exprimer une règle.

  Prenons l'exemple de l'implication (la règle) suivante : « Si tu bois de l'alcool, alors tu as plus de 18 ans ». Reformulons alors la table de vérité :

Tu bois de l'alcool	Tu as plus de 18 ans	Si tu bois de l'alcool, alors tu as plus de 18 ans
OUI	OUI	règle respectée
OUI	NON	règle enfreinte
NON	OUI	règle respectée
NON	NON	règle respectée

- ⚠ La proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ne signifie pas « $\mathcal{A}$ est vraie donc $\mathcal{B}$ est vraie ». Si $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie mais $\mathcal{A}$ est fausse, alors cela ne dit rien sur $\mathcal{B}$. Par contre, si $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie et si $\mathcal{B}$ est fausse, alors $\mathcal{A}$ est forcément fausse.

Exemple : *Essayez de comprendre ces remarques avec les propositions $\mathcal{A}$: « Il pleut » et $\mathcal{B}$: « Le sol (de la rue) est mouillé ».*

Définition. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. L'implication $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ est appelée la réciproque de l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.*

⚠ Savoir qu'une implication est vraie ou fausse ne nous dit absolument rien sur la véracité de sa réciproque.
Par exemple toute fonction dérivable est continue mais la réciproque est fausse.

Proposition (transitivité de l'implication, syllogisme). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La proposition $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ et $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}))$ implique la proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$.*

$\rightsquigarrow$ Exercice.

Exemple :

Proposition. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est équivalente à la proposition $(\text{non } \mathcal{A})$ ou $\mathcal{B}$.*

Démonstration. On constate que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ et $((\text{non } \mathcal{A})$ ou $\mathcal{B})$ ont les mêmes valeurs de vérité :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	non $\mathcal{A}$	(non $\mathcal{A}$) ou $\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

□

b) Négation et contraposée d'une implication

Proposition (négation d'une implication). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La négation de $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est équivalente à la proposition $\mathcal{A}$ et $(\text{non } \mathcal{B})$.*

Démonstration.

□

Proposition/Définition (contraposée d'une implication). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La proposition $(\text{non } \mathcal{B}) \Rightarrow (\text{non } \mathcal{A})$ est équivalente à la proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. On l'appelle la contraposée de la proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.*

Démonstration.

□

Exemple :

c) Double implication

Pour montrer que $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est vraie, on procède soit par équivalences intermédiaires, soit par double implication :

Proposition (double implication). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La proposition $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est équivalente à la proposition $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ et $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$.*

DÉMONSTRATION. On constate que $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ et $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}))$ a les mêmes valeurs de vérité que $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$	$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ et $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

□

Définition. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. Pour exprimer que la proposition $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est vraie, on peut dire aussi :*
- *$\mathcal{A}$ (est vraie) si et seulement si $\mathcal{B}$ (est vraie).*
- *$\mathcal{A}$ est une condition nécessaire et suffisante de $\mathcal{B}$.*
- *Pour que $\mathcal{A}$ (soit vraie), il faut et il suffit que $\mathcal{A}$ (soit vraie).*

II Ensembles, éléments et quantificateurs

1) Notion d'ensemble et d'éléments

En ECS, on travaille avec une notion intuitive des ensembles.

Définition. *Un ensemble E est une collection d'objets appelés éléments de E.*
On note ______ *pour dire que l'élément x appartient à E. On note* ______ *pour dire que l'élément x n'appartient pas à E.*
On dit que deux ensembles E et F sont égaux, et on note ______, *si ils ont les mêmes éléments.*

Remarques :
- Un ensemble peut être défini par *extension* : en listant tous ses éléments entre accolades. Dans ce cas, l'ordre dans lequel les éléments sont listés, n'a pas d'importance. De plus chaque élément figure une seule fois dans la liste.
- Soit P une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E. Si un élément x de E vérifie la propriété P, on écrit « $P(x)$ est vraie » ou simplement « $P(x)$ ».
- Un ensemble peut être défini par *compréhension* : on note $\{x \in E \,|\, P(x)\}$ l'ensemble des éléments x de E tels que $P(x)$ est vraie.

Exemple :

Définition.
- *On appelle ensemble vide, et on note* ______, *l'ensemble ne contenant aucun élément.*
- *Un ensemble ayant un élément x et un seul est appelé singleton et noté* ______.

Définition. *Soient E et F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F, et on note* ______, *lorsque tous les éléments de E sont aussi des éléments de F. On dit aussi que E est une partie (ou un sous-ensemble) de F.*

On définit alors ______, *le complémentaire de E dans F, i.e. l'ensemble des éléments de F qui ne sont pas des éléments de E. On le note aussi* ______.

Définition. *Soit E et F deux ensembles. On note*
- ______ *l'intersection de E et F, i.e. l'ensemble formé des éléments qui sont à la fois dans E et dans F.*
- ______ *la réunion de E et F, i.e. l'ensemble formé des éléments qui sont dans l'un au moins des ensembles E et F.*

On dit que E et F sont disjoints si ______. *Dans ce cas, on dit que* ______ *est une union disjointe.*

Exemples :

Nous reviendrons plus en détails sur la notion d'ensemble dans la chapitre *Ensembles et applications*.

2) Quantificateurs

Définition. *Soit P une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E.*

- *La proposition*   *signifie que tous les éléments de E vérifient la propriété P. On dit que le symbole $\forall$ est le quantificateur universel.*
- *La proposition*   *signifie qu'il existe au moins un élément de E qui vérifie la propriété P. On dit que le symbole $\exists$ est le quantificateur existentiel.*
- *La proposition*   *signifie qu'un et un seul élément de E vérifie la propriété P.*

Remarques :

- Le quantificateur universel $\forall$ se lit « *Pour tout* » ou « *Quel que soit* ». Le quantificateur existentiel $\exists$ se lit « *Il existe* » (sous-entendu « *Il existe au moins un* »). Enfin $\exists!$ se lit « *Il existe un unique* ».
- Le x dans « $\exists x \in E,\ P(x)$ » est une variable muette. Deux conséquences à cela :
  — On peut remplacer x par une autre variable (qui n'est pas déjà utilisée pour définir un autre objet).
  — Si on sait que la proposition « $\exists x \in E,\ P(x)$ » est vraie et que l'on veut l'utiliser pour démontrer une autre proposition, on commencera par écrire

  Dans ce cas le x n'est plus une variable muette mais un object précis (qui vérifie P).
- « $\exists!\ x \in E,\ P(x)$ » est une notation condensée de la proposition « $\exists x \in E,\ \big(P(x) \text{ et } (\forall y \in E,\ P(y) \ \Rightarrow\ x = y)\big)$ », signifiant qu'il existe un élément de E vérifiant la propriété P et que tous les autres éléments de E ne la vérifient pas.
- On fera bien attention à l'ordre des quantificateurs : si P est une propriété portant sur les éléments de deux ensembles E et F, alors les propositions

  $$« \forall x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x,y) » \qquad \text{et} \qquad « \exists y \in F,\ \forall x \in E,\ P(x,y) »$$

  n'ont pas la même signification a priori. La première signifie que, pour chaque élément x de E, il existe y dans F (dépendant éventuellement de x) tel que $P(x,y)$ est vrai. La seconde signifie qu'il existe un y dans F tel que, quel que soit x dans E, $P(x,y)$ est vrai (le y universel : c'est le même pour tous les x).

  Illustrons-cela avec un exemple :

  Par contre, quand deux quantificateurs existentiels (resp. universels) se suivent, on peut les échanger sans changer le sens de la proposition.
- Le quantificateur universel $\forall$ est distributif sur et mais pas sur ou. Le quantificateur existentiel $\exists$ est distributif sur ou mais pas sur et.
- Les quantificateurs $\forall$, $\exists$ et $\exists!$ (ainsi que les symboles d'implication $\Rightarrow$ et d'équivalence $\Leftrightarrow$) ne doivent surtout pas être employés comme des abréviations au milieu du texte.
- Soit P une propriété portant sur deux nombres réels. Soit y un réel. Pour raccourcir les notations, on écrira souvent
  — « $\forall x \geqslant y,\ P(x,y)$ » au lieu de « $\forall x \in \mathbb{R},\ \big(x \geqslant y \ \Rightarrow\ P(x,y)\big)$ ».
  — « $\exists x \geqslant y,\ P(x,y)$ » au lieu de « $\exists x \in \mathbb{R},\ \big(x \geqslant y \text{ et } P(x,y)\big)$ ».

Proposition (négation d'une proposition contenant des quantificateurs). *Soit P une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E.*

- *La négation de la proposition « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est « $\exists x \in E,\ \mathrm{non}(P(x))$ ».*
- *La négation de la proposition « $\exists x \in E,\ P(x)$ » est « $\forall x \in E,\ \mathrm{non}(P(x))$ ».*