Développements limités usuels en 0

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $\dfrac{1}{1-u} \underset{0}{=} 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots + u^n + o(u^n)$

- $\dfrac{1}{1+u} \underset{0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots + (-1)^n u^n + o(u^n)$

- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1+u)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha u + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}u^3 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}u^n + o(u^n)$,

  Le réel α doit être fixe.

- $-\ln(1-u) \underset{0}{=} u + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{3} + \cdots + \dfrac{u^n}{n} + o(u^n)$

- $\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{u^n}{n} + o(u^n)$

- $e^u \underset{0}{=} 1 + u + \dfrac{u^2}{2!} + \dfrac{u^3}{3!} + \cdots + \dfrac{u^n}{n!} + o(u^n)$

- $\cos(u) \underset{0}{=} 1 - \dfrac{u^2}{2!} + \dfrac{u^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{u^{2n}}{(2n)!} + o(u^{2n+1})$

- $\sin(u) \underset{0}{=} u - \dfrac{u^3}{3!} + \dfrac{u^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(u^{2n+2})$

- $\tan(u) \underset{0}{=} u + \dfrac{u^3}{3} + \dfrac{2}{15}u^5 + o(u^6)$

Les développements limités usuels suivants ne sont pas à connaître par cœur mais il faut savoir les retrouver à partir des précédents :

- $\sqrt{1+u} \underset{0}{=} 1 + \dfrac{u}{2} - \dfrac{u^2}{8} + \dfrac{u^3}{16} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}u^n + o(u^n)$
- $\dfrac{1}{\sqrt{1+u}} \underset{0}{=} 1 - \dfrac{u}{2} + \dfrac{3}{8}u^2 + \cdots + (-1)^n \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}u^n + o(u^n)$
- $\mathrm{Arctan}(u) \underset{0}{=} u - \dfrac{u^3}{3} + \dfrac{u^5}{5} + \cdots + (-1)^n \dfrac{u^{2n+1}}{2n+1} + o(u^{2n+2})$

Les opérations autorisées[1] sur les développements limités en 0 sont : la somme, le produit, la multiplication par une constante non nulle, la primitivation, la substitution par un polynôme nul en 0.

La dérivation est autorisée uniquement si on sait que la dérivée admet un développement limité.

1. Sont aussi autorisés, mais c'est hors programme d'ECS, la composition à droite par une fonction nulle en 0 et le passage à l'inverse (si la fonction ne s'annule pas au voisinage de 0).