Programme de colles - Semaine n° 9

du 18 au 25 novembre 2018

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

8 – Combinatoire

9 – Probabilités sur un univers fini

10 – Variables aléatoires finies (*le début, en cours uniquement*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Énoncer et montrer (par récurrence) la formule du binôme de Newton.
- Donner la définition d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
- Énoncer et montrer la formule de Poincaré (ou du crible) pour deux puis pour trois événements.
- Montrer que, si A un événement de probabilité non nulle, alors la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A$ est une probabilité.
- Donner la définition d'un système complet d'événements d'un espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ puis énoncer et montrer la formule des probabilités totales (les deux versions [1]).
- Énoncer et démontrer la formule des probabilités composées.
- Donner (sans démonstration) un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ modélisant un schéma binomial de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$ (répétition de n expériences de Bernoulli de paramètre p identiques et indépendantes). Calculer ensuite la probabilité d'obtenir exactement $k \in [\![0, n]\!]$ succès.
- Montrer la linéarité (version faible [2]) de l'espérance d'une variable aléatoire réelle (v.a.r) finie.
- Énoncer le théorème de transfert pour les v.a.r finies. Application à l'écriture de la variance avec une somme.
- Montrer la formule de Koenig-Huygens pour les v.a.r finies.

Prévisions pour la semaine 10 : chapitre 9, chapitre 10 (en entier) et chapitre 11 (Étude locale de fonctions – en cours uniquement).

1. Si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements alors, pour tout événement B, $\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k)$. De plus, si les événements de la famille sont de probabilités non nulles alors, pour tout événement B, $\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{A_k}(B)\mathbb{P}(A_k)$.
2. Si X est une v.a.r finie et si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b$.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 8 - Complément de combinatoire

cf. programme de la semaine 8.

Chapitre 9 - Probabilités sur un univers fini

- Espaces probabilisés finis
  - Expérience aléatoire. Notions d'univers et d'événements. Événements incompatibles. Espaces probabilisables finis $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$
  - Opérations sur les événements. Système complet (fini) d'événements.
  - Probabilité sur un espace probabilisable fini. Espaces probabilisés finis $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Premières propriétés. Additivité finie. Formule de Poincaré (ou du crible) pour deux ou trois événements.
  - Probabilités et systèmes complet d'événements. Formule des probabilités totales (première version). Une probabilité sur un espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est entièrement déterminée par la donnée des probabilités des événements élémentaires.
  - Cas d'équiprobabilité.
- Probabilité conditionnelle
  - La probabilité conditionnelle sachant un événement de probabilité non nul est une probabilité.
  - Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales (deuxième version). Formule de Bayes.
- Indépendance
  - Indépendance de deux événements. Lien avec les probabilités conditionnelles.
  - Famille finie d'événements mutuellement indépendants. Théorèmes des coalitions.
  - Schéma de Bernoulli, schéma binomial. Probabilité d'obtenir exactement k succès dans un schéma binomial.

Chapitre 10 - Variables aléatoires réelles finies (*sauf le paragraphe III*)

- Variable aléatoire réelle (v.a.r.) X finie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
  - Univers image $X(\Omega)$. Notations $[X = x]$, $[x \leqslant x]$, etc. Système complet associé à une variable aléatoire réelle finie.
  - Loi d'une v.a.r. finie. Égalité en loi (notation $X \overset{\mathscr{L}}{=} Y$). Existence de variable aléatoire réelle finie de loi donnée (notation $X \hookrightarrow \mathscr{L}$).
  - Fonction de répartition d'une v.a.r. finie. La fonction de répartition caractérise la loi.
  - Transfert de v.a.r. finie. Pas de formule général mais cas particuliers des lois de $aX + b$, X^2, $|X|$, e^X, $\ln(X)$, etc.
- Espérance et variance d'une v.a.r. finie
  - Positivité de l'espérance d'une v.a.r. finie positive. Linéarité de l'espérance. Notion de variable centrée.
  - Théorème de transfert.
  - Variance et écart-type. Formule de Koenig-Huygens. $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Notion de v.a.r. finie centrée réduite.