Programme de colles - Semaine n° 8

du 12 au 18 novembre 2018

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

7 – Ensembles et applications

8 – Combinatoire

9 – Probabilités sur un univers fini

- ⋆ Espaces probabilisés finis (*cours et exercices*)
- ⋆ Probabilité conditionnelle (*cours uniquement*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Montrer que la composée de deux injections est une injection.
- Montrer que la composée de deux surjections est une surjection.
- Savoir dénombrer (sans démonstration) les ensembles suivants :
  - parties d'un ensemble à n éléments,
  - parties à p éléments d'un ensemble à n éléments (combinaisons),
  - p-listes d'un ensemble à n éléments,
  - p-listes d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments,
  - permutations d'un ensemble à n éléments.
- Énoncer et montrer (par récurrence) la formule du binôme de Newton.
- Donner la définition d'un système complet d'événements d'un espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
- Donner la définition d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
- Montrer les premières propriétés [1] d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
- Énoncer et montrer la formule de Poincaré (ou du crible) pour deux ou trois événements.
- Montrer que, si A un événement de probabilité non nulle, alors la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A$ est une probabilité.
- Énoncer et montrer la formule des probabilités totales (les deux versions [2]).

Les exercices sur les chapitres 8 et 9 consisteront essentiellement en des dénombrements d'ensembles finis appliqués éventuellement à des calculs de probabilités (dans le cas d'équiprobabilité).

Prévisions pour la semaine 9 : chapitre 8, chapitre 9 (en entier) et début du chapitre 10 (Variables aléatoires réelles finies).

1. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$ et, si $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, alors $\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$ et $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$

2. Si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements alors, pour tout événement B, $\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k)$. De plus, si les événements de la famille sont de probabilités non nulles alors, pour tout événement B, $\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{A_k}(B)\mathbb{P}(A_k)$.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 7 - Ensembles et applications

cf. programme de la semaine 7.

Chapitre 8 - Complément de combinatoire

- Cardinal d'un ensemble fini et dénombrement
  - Définition intuitive. Définition avec la bijection. Un ensemble en bijection avec un ensemble fini est fini et a le même cardinal. Le cardinal d'une partie d'un ensemble E est inférieur au cardinal de E. Cas d'égalité.
  - Cardinal de l'union disjointe d'une famille finie de parties. Lemme des bergers. Cardinal du complémentaire d'une partie. Formule de Poincaré pour deux parties. Cardinal d'un produit cartésien d'ensembles finis. Nombre de parties d'un ensemble à n éléments.
- Listes, permutations, combinaisons
  - Notion de p-liste d'un ensemble à n éléments. Cardinal : n^p. Lien avec les applications d'un ensemble de p éléments dans un ensemble à n éléments.
  - Cardinal de l'ensemble des p-listes d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments : $\dfrac{n!}{(n-p)!}$. Lien avec les injections d'un ensemble de p éléments dans un ensemble à n éléments.
  - Permutations d'un ensemble fini E à n éléments (bijection de E dans E par définition). Cardinal : $n!$.
  - Combinaisons : parties à p éléments d'un ensemble à n éléments. Lien avec les chemins sur les arbres binaires. Cardinal : $\binom{n}{p}$.
  - Retour sur les propriétés des coefficients binomiaux. Triangle de Pascal. Binôme de Newton.
  - Tirages successifs avec ou sans remise. Tirages simultanés.

Chapitre 9 - Probabilités sur un univers fini (sauf le paragraphe III)

- Espaces probabilisés finis
  - Expérience aléatoire. Notions d'univers et d'événements. Événements incompatibles. Espaces probabilisables finis $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$
  - Opérations sur les événements. Système complet (fini) d'événements.
  - Probabilité sur un espace probabilisable fini. Espaces probabilisés finis $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Premières propriétés. Additivité finie. Formule de Poincaré (ou du crible) pour deux ou trois événements.
  - Probabilités et systèmes complet d'événements. Formule des probabilités totales (première version). Une probabilité sur un espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est entièrement déterminée par la donnée des probabilités des événements élémentaires.
  - Cas d'équiprobabilité.
- Probabilité conditionnelle
  - La probabilité conditionnelle sachant un événement de probabilité non nul est une probabilité.
  - Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales (deuxième version). Formule de Bayes.