

Programme de colles - Semaine n° 7

du 5 au 11 novembre 2018

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

- 6 – Convergences de suites
- 7 – Ensembles et applications
- 8 – Combinatoire (*en cours uniquement*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examineur parmi la liste suivante :

- Énoncer et démontrer le théorème de la limite monotone (on pourra se limiter au cas croissant).
- Donner la définition de deux suites adjacentes et énoncer (sans démonstration) le théorème de convergence des suites adjacentes.
- Montrer que \cap (resp. \cup) est distributive sur \cup (resp. \cap) pour une famille quelconque¹ d'ensembles.
- Montrer les lois de Morgan pour une famille quelconque² d'ensembles.
- Donner la définition d'une partition d'un ensemble.
- Donner trois définitions équivalentes³ d'une surjection.
- Donner trois définitions équivalentes⁴ d'une injection.
- Montrer que la composée de deux injections est une injection.
- Montrer que la composée de deux surjections est une surjection.
- Savoir dénombrer (sans démonstration) les ensembles suivants :
 - parties d'un ensemble à n éléments,
 - parties à p éléments d'un ensemble à n éléments (combinaisons),
 - p -listes d'un ensemble à n éléments,
 - p -listes d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments,
 - permutations d'un ensemble à n éléments.
- Énoncer et montrer (par récurrence) la formule du binôme de Newton.

Prévisions pour la semaine 8 : chapitre 7, chapitre 8 et début du chapitre 9 (Probabilités sur un univers fini).

1. $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$ et $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B)$

2. $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$ et $\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$

3. f admet au moins un antécédent, $f(E) = F$ et définition quantifiée.

4. f admet au plus un antécédent, et deux définitions quantifiées.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 6 - Convergence de suites réelles

cf. programme de la semaine 6.

Chapitre 7 - Ensembles et applications

- Ensembles et éléments
 - Appartenance, ensembles égaux, définition par extension/compréhension.
 - Partie d'un ensemble. Inclusion, double inclusion, transitivité.
 - Ensemble vide. Ensemble des parties d'un ensemble.
 - Opérations sur les parties : complémentaire, intersection, union, différence. Cas des ensembles définis par compréhension. Propriétés : commutativité, distributivité, lois de Morgan, etc. Parties disjointes.
 - Couples, n -uplets d'éléments. Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles. Notation E^n .
 - Famille d'éléments d'un ensemble indexée par un ensemble. Union et intersection d'une famille de parties d'un ensemble. Distributivité et lois de Morgan. Partition d'un ensemble.
- Applications
 - Notion d'application $f : E \rightarrow F$. Image, antécédents, ensembles de départ et d'arrivée. Différence avec la notion de fonction. Domaine de définition. Égalité d'applications. Graphe d'une application. Ensemble image $f(A)$ d'une partie A . Application identité Id_E , application constante.
 - Composition d'applications. Associativité.
 - Applications injectives. La composée de deux injections est une injection.
 - Applications surjectives. La composée de deux surjections est une surjection.
 - Applications bijectives. La composée de deux bijections est une bijection. Application réciproque. Caractérisations d'une bijection. Réciproque d'une composition de bijections.

Chapitre 8 - Complément de combinatoire

- Cardinal d'un ensemble fini et dénombrement
 - Définition intuitive. Définition avec la bijection. Un ensemble en bijection avec un ensemble fini est fini et a le même cardinal. Le cardinal d'une partie d'un ensemble E est inférieur au cardinal de E . Cas d'égalité.
 - Cardinal de l'union disjointe d'une famille finie de parties. Lemme des bergers. Cardinal du complémentaire d'une partie. Formule de Poincaré pour deux parties. Cardinal d'un produit cartésien d'ensembles finis. Nombre de parties d'un ensemble à n éléments.
- Listes, permutations, combinaisons
 - Notion de p -liste d'un ensemble à n éléments. Cardinal : n^p . Lien avec les applications d'un ensemble de p éléments dans un ensemble à n éléments.
 - Cardinal de l'ensemble des p -listes d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments : $\frac{n!}{(n-p)!}$. Lien avec les injections d'un ensemble de p éléments dans un ensemble à n éléments.
 - Permutations d'un ensemble fini E à n éléments (bijection de E dans E par définition). Cardinal : $n!$.
 - Combinaisons : parties à p éléments d'un ensemble à n éléments. Lien avec les chemins sur les arbres binaires. Cardinal : $\binom{n}{p}$.
 - Retour sur les propriétés des coefficients binomiaux. Triangle de Pascal. Binôme de Newton.
 - Tirages successifs avec ou sans remise. Tirages simultanés.