Programme de colles - Semaine n° 6

du 15 au 21 octobre 2018

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

5 – Généralités sur les suites de nombres réels

6 – Convergences de suites

7 – Ensembles et applications (*en cours uniquement*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Donner la définition d'une suite convergente et d'une suite qui tend vers $\pm\infty$.
- Montrer l'unicité de la limite d'une suite convergente (utilisant la définition quantifiée).
- Montrer qu'une des suites suivantes converge vers 0 : $(1/n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $\alpha > 0$, et $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $q \in]-1, 1[$.
- Montrer qu'une des suites suivantes tend vers $+\infty$: $(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $\alpha > 0$, $((\ln(n))^\beta)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $\beta > 0$, $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $q \in]1, +\infty[$.
- Énoncer et démontrer le théorème de la limite monotone (on pourra se limiter au cas croissant).
- Donner la définition de deux suites adjacentes et énoncer (sans démonstration) le théorème de convergence des suites adjacentes.
- Montrer les lois de Morgan pour les ensembles.
- Donner trois définitions équivalentes[1] d'une surjection.
- Donner trois définitions équivalentes[2] d'une injection.
- Montrer que la composée de deux injections est une injection.
- Montrer que la composée de deux surjections est une surjection.

Prévisions pour la semaine 7 : chapitre 6, chapitre 7 et début du chapitre 8 (Élements de combinatoire).

1. f admet au mois un antécédent, $f(E) = F$ et définition quantifiée.
2. f admet au plus un antécédent, et deux définitions quantifiées.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 5 - Généralités sur les suites de nombres réels

cf. programme de la semaine 5.

Chapitre 6 - Convergence de suites réelles

- Bornes supérieures et inférieures
  - Majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, inférieure sur $\mathbb{R}$.
  - Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum. Théorème de la borne supérieure. Toute partie non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{Z}$ admet un maximum (resp. un minimum).
  - Existence de la partie entière d'un réel.
- Suites convergentes
  - Définition quantifiée. Unicité de la limite.
  - La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes les deux vers ℓ.
  - Exemples fondamentaux : convergence des suites $(1/n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $\alpha > 0$, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $q \in]-1, 1[$).
  - Limites et relation d'ordre. Théorèmes d'encadrement.
  - Opérations algébriques sur les limites.
  - Limite de suites et composition par une fonction continue (*résultat admis provisoirement*).
- Suites tendant vers $\pm\infty$
  - Définition quantifiée. Unicité de la limite.
  - Exemples fondamentaux : limites de $(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $\alpha > 0$, $((\ln(n))^\beta)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $\beta > 0$, $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $q \in]1, +\infty[$).
  - Limites infinies et relation d'ordre.
  - Opérations algébriques sur les suites admettant une limite finie ou infinie. Formes indéterminées.
  - Croissances comparées.
  - Limites de suites et composition par des fonctions (*résultat admis provisoirement*).
- Limites de suites monotones
  - Théorème de la limite monotone
  - Suites adjacentes
- Exemples de suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$
  - Condition nécessaire de convergence vers un point fixe de f, dans le cas où f est continue.

Chapitre 7 - Ensembles et applications

- Ensembles et éléments
  - Appartenance, ensembles égaux, définition par extension/compréhension.
  - Partie d'un ensemble. Inclusion, double inclusion, transitivité.
  - Ensemble vide. Ensemble des parties d'un ensemble.
  - Opérations sur les parties : complémentaire, intersection, union, différence. Cas des ensembles définis par compréhension. Propriétés : commutativité, distributivité, lois de Morgan, etc. Parties disjointes.
  - Couples, n-uplets d'éléments. Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles. Notation E^n.
  - Famille d'éléments d'un ensemble indexée par un ensemble. Union et intersection d'une famille de parties d'un ensemble. Distributivité et lois de Morgan. Partition d'un ensemble.
- Applications
  - Notion d'application $f : E \longrightarrow F$. Image, antécédents, ensembles de départ et d'arrivée. Différence avec la notion de fonction. Domaine de définition. Égalité d'applications. Graphe d'une application. Ensemble image $f(A)$ d'une partie A. Application identité Id_E, application constante.
  - Composition d'applications. Associativité.
  - Applications injectives. La composée de deux injections est une injection.
  - Applications surjectives. La composée de deux surjections est une surjection.
  - Applications bijectives. La composée de deux bijections est une bijection. Application réciproque. Caractérisations d'une bijection. Réciproque d'une composition de bijections.