Programme de colles - Semaine n° 5

du 8 au 14 octobre 2018

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

4 – Nombres complexes et trigonométrie

5 – Généralités sur les suites de nombres réels

6 – Convergences de suites (*sauf les paragraphes IV et V*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Montrer l'inégalité triangulaire pour les complexes (*pas le cas d'égalité*).
- Montrer la formule d'addition de la tangente ($\tan(a+b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$).
- Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$ lorsque $\theta \in \mathbb{R}$.
- Déterminer (en se ramenant à une suite géométrique) le terme général d'une suite arithmético-géométrique.
- Donner (sans démonstration) le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants selon le signe du discriminant de son équation caractéristique.
- Donner la définition d'une suite convergente et d'une suite qui tend vers $\pm\infty$.
- Montrer l'unicité de la limite d'une suite convergente (utilisant la définition quantifiée).
- Montrer qu'une des suites suivantes converge vers 0 : $(1/n^{\alpha})_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $\alpha > 0$, et $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $q \in \,]-1,1[$.
- Montrer qu'une des suites suivantes tend vers $+\infty$: $(n^{\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ pour $\alpha > 0$, $((\ln(n))^{\beta})_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $\beta > 0$, $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $q \in \,]1,+\infty[$.

Prévisions pour la semaine 5 : chapitre 5, chapitre 6 et début du chapitre 7 (Ensembles et applications).

Détails des chapitres au programme

Chapitre 4 - Nombres complexes et trigonométrie

cf. programme de la semaine 4.

Chapitre 5 - Généralités sur les suites de nombres réels

- Notion de suite réelle.
  - Suites définies explicitement, par récurrence ou implicitement.
  - Propriété vraie à partir d'un certain rang.
  - Opérations sur les suites. Suites monotones. Suites majorées, minorées, bornées.
- Exemples de suites réelles
  - Suites arithmétiques, géométriques (monotonie, somme des termes).
  - Suites arithmético-géométriques.
  - Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients (réels) constants.

Chapitre 6 - Convergence de suites réelles

- Bornes supérieures et inférieures
  - Majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, inférieure sur $\mathbb{R}$.
  - Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum. Théorème de la borne supérieure. Toute partie non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{Z}$ admet un maximum (resp. un minimum).
  - Existence de la partie entière d'un réel.
- Suites convergentes
  - Définition quantifiée. Unicité de la limite.
  - La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes les deux vers ℓ.
  - Exemples fondamentaux : convergence des suites $(1/n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $\alpha > 0$, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $q \in]-1, 1[$.
  - Limites et relation d'ordre. Théorèmes d'encadrement.
  - Opérations algébriques sur les limites.
  - Limite de suites et composition par une fonction continue (*résultat admis provisoirement*).
- Suites tendant vers $\pm\infty$
  - Définition quantifiée. Unicité de la limite.
  - Exemples fondamentaux : limites de $(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $\alpha > 0$, $((\ln(n))^\beta)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $\beta > 0$, $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $q \in]1, +\infty[$.
  - Limites infinies et relation d'ordre.
  - Opérations algébriques sur les suites admettant une limite finie ou infinie. Formes indéterminées.
  - Croissances comparées.
  - Limites de suites et composition par des fonctions (*résultats admis provisoirement*).

Le théorème de la limite monotone, les suites adjacentes et les suites récurrentes ne sont pas au programme de colle de cette semaine.