Programme de colles - Semaine n° 4

du 31 septembre au 6 octobre 2018

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

3 – Étude de fonctions réelles d'une variable réelle

4 – Nombres complexes et trigonométrie

5 – Généralités sur les suites de nombres réels (*cours uniquement*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Montrer l'existence et l'unicité de la racine n-ième d'un réel positif (théorème de la bijection pour les réels de $[0,1]$, puis cas des réels de $[1,+\infty[$).
- Montrer la continuité et la dérivabilité de la fonction $p_\alpha : x \longmapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec calcul de la dérivée (et continuité en 0 lorsque $\alpha > 0$, dérivabilité en 0 lorsque $\alpha \geqslant 1$).
- Montrer l'inégalité triangulaire pour les complexes (*pas le cas d'égalité*).
- Mettre sous forme canonique $az^2 + az + c$ lorsque a, b, c et z sont des complexes tels que $a \neq 0$. Factoriser selon que $\Delta = b^2 - 4ac$ est nul ou non.
- Énoncer une formule de trigonométrie (cf. formulaire).
- Montrer la formule d'addition de la tangente ($\tan(a+b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$).
- Montrer la formule de Moivre [1] : si $n \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.
- Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$ lorsque $\theta \in \mathbb{R}$.
- Déterminer (en se ramenant à une suite géométrique) le terme général d'une suite arithmético-géométrique [2].
- Donner (sans démonstration) le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants [3] selon le signe du discriminant de son équation caractéristique.

Prévisions pour la semaine 5 : chapitre 4, chapitre 5 et début du chapitre 6 (Convergence de suites réelles).

1. On montre d'abord par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ en utilisant la proposition suivante :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \forall \theta' \in \mathbb{R}, \qquad e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}.$$

On en déduit ensuite le cas où $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$.

2. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$ (avec $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $b \in \mathbb{R}^*$)
3. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ (avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$).

Détails des chapitres au programme

Chapitre 3 - Étude de fonctions réelles d'une variable réelle

- Généralités sur les fonctions réelles d'une variable réelle
  - Domaine de définition, image, antécédents, courbe représentative. Opérations sur les fonctions. Notion de fonction bijective et fonction réciproque.
  - Propriétés globales des fonctions (signe, périodicité, parité, monotonie, fonctions majorées/minorées/bornées).
- Rappels de Terminale S (... *on reviendra sur tout ça en détail prochainement*)
  - Limite d'une fonction en un réel et en $\pm\infty$. Asymptotes.
  - Fonctions continues. Théorème des valeurs intermédiaires. Théorème de la bijection (*pour le moment on s'aide du tableau de variations pour rédiger... mais on écrit le nom du théorème*).
  - Fonctions dérivables. Caractérisation des fonctions constantes, croissantes et décroissantes sur un intervalle. Cas des fonctions strictement monotones.
  - Tableaux de variations.
- Fonctions usuelles
  - Fonctions affines. Équation d'une droite passant par deux points du plan.
  - Définition et propriétés des fonctions puissances d'un nombre entier, polynomiales, rationnelles, cosinus, sinus, tangente, exponentielle, logarithme népérien (dont les croissances comparées), valeur absolue, partie entière.
  - Puissances à exposant réel (définitions et propriétés). Fonction puissance d'un réel (prolongée en 0, continue/dérivable en 0 selon α). Exponentielle de base a.

Chapitre 4 - Nombres complexes et trigonométrie

- Propriétés fondamentales des nombres complexes
  - Opérations algébriques sur les nombres complexes. Sommes de nombres complexes (binôme de Newton, somme géométrique).
  - Conjugué et module d'un nombre complexe. Inégalité triangulaire.
- Formules de trigonométrie sur le cosinus, le sinus et la tangente (résolution d'équations et inéquations trigonométriques).
- Forme trigonométrique d'un complexe non nul
  - Argument d'un complexe non nul. Formes trigonométriques et exponentielles d'un complexe non nul. Propriétés de l'exponentielle d'un imaginaire pur.
  - Formules de Moivre et d'Euler. Technique de l'arc-moitié et calcul de sommes de sinus/cosinus. Applications au développement de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ et à la linéarisation de $\cos^p(\theta)$, $\sin^q(\theta)$ et $\cos^p(\theta)\sin^q(\theta)$.
- Équations polynomiales complexes
  - Recherche des racines carrées d'un complexe non nul.
  - Équations du second degré à coefficients complexes.
  - Racines n-ièmes de complexes.

    Conformément au programme d'ECS, les résultats concernant les racines n-ièmes de l'unité ne sont pas exigibles des étudiants mais ces dernières pourront être étudiées comme exemples d'utilisation de la notation exponentielle.