

Programme de colles - Semaine n° 3

du 24 au 30 septembre 2018

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

- 1 – Logique et raisonnements
- 2 – Ensembles de nombres, calculs algébriques et inégalités
- 3 – Étude de fonctions réelles d'une variable réelle

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examineur parmi la liste suivante :

- Montrer l'inégalité triangulaire pour les réels.
- Montrer l'unicité de la partie entière d'un réel.
- Mettre sous forme canonique $az^2 + az + c$ lorsque $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$. Factoriser selon le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Calculer (avec une preuve par récurrence) $\sum_{k=0}^n k$, $\sum_{k=0}^n k^2$, $\sum_{k=0}^n k^3$ ou $\sum_{k=0}^n x^k$, lorsque $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
- Énoncer et démontrer (par le calcul) la formule du triangle de Pascal.
- Énoncer (sans démonstration) la formule du binôme de Newton. Application aux calculs de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$ lorsque $n \in \mathbb{N}^*$.
- Montrer l'existence et l'unicité de la racine n -ième d'un réel positif (théorème de la bijection pour les réels de $[0, 1]$, puis cas des réels de $[1, +\infty[$).
- Donner la définition et montrer la continuité et la dérivabilité des fonctions puissances d'exposant réel¹ sur \mathbb{R}_+^* (avec calcul de la dérivée et preuve de la continuité en 0 lorsque $\alpha > 0$, et de la dérivabilité en 0 lorsque $\alpha \geq 1$).

Les exercices (les 45 minutes restantes) consisteront essentiellement en des calculs de sommes, des raisonnements par récurrence, des études de fonctions et des preuves d'inégalités.

Prévisions pour la semaine 4 : chapitre 3 et chapitre 4 (Nombres complexes et trigonométrie)

1. c'est-à-dire la fonction $p_\alpha : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$. On pose $p_\alpha(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 1 - Logique et raisonnements

- Éléments de logique
 - Propositions équivalentes. Négation d'une proposition. Conjonction et disjonctions de propositions. Lois de Morgan.
 - Implication. Réciproque, contraposée et négation d'une implication. Double implication. Conditions nécessaires, suffisantes.
- Quantificateurs universels et existentiels. Négation d'une phrase quantifiée.
- Raisonnement direct, par contraposée, par l'absurde, par analyse/synthèse, par disjonction des cas, par récurrence.

Chapitre 2 - Ensembles de nombres, calculs algébriques et inégalités

- Rappels et compléments sur les ensembles de nombres
 - Relation d'ordre sur \mathbb{R} . Valeur absolue, inégalité triangulaire. Partie entière.
 - Puissances entières. Élévation à une puissance entière dans l'inégalité $x < y$ lorsque x et y sont des réels (selon le signe des réels, la parité et le signe de la puissance entière).
 - Racine n -ième d'un réel positif x , avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Notation $x^{1/n}$. Opérations les puissances.
 - Trinôme de second degré à coefficients réels. Forme canonique. Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$ dans le cas où x est réel ou complexe. Signe d'un trinôme dans le cas réel.
- Sommes et produits de nombres
 - Propriétés des sommes finies (factorisation, linéarité de la somme, sommation par paquets, inégalités) et des produits finis. Changement d'indice. Sommes et produits télescopiques. Lien entre somme et produit (via le logarithme).
 - Sommes usuelles : $\sum_{k=0}^n k$, $\sum_{k=0}^n k^2$ et $\sum_{k=0}^n k^3$, $\sum_{k=0}^n x^k$, lorsque $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
- Factorielle et coefficients binomiaux : définition par la formule $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. Propriétés immédiates. Triangle de Pascal. Formule du binôme de Newton.
- Sommes doubles (sur un domaine rectangulaire, triangulaire ou triangulaire strict).

Chapitre 3 - Étude de fonctions réelles d'une variable réelle

- Généralités sur les fonctions réelles d'une variable réelle
 - Domaine de définition, image, antécédents, courbe représentative. Opérations sur les fonctions. Notion de fonction bijective et fonction réciproque.
 - Propriétés globales des fonctions (signe, périodicité, parité, monotonie, fonctions majorées/minorées/bornées).
- Rappels de Terminale S (... on reviendra sur tout ça en détail prochainement)
 - Limite d'une fonction en un réel et en $\pm\infty$. Asymptotes.
 - Fonctions continues. Théorème des valeurs intermédiaires. Théorème de la bijection (*pour le moment on s'aide du tableau de variations pour rédiger... mais on écrit le nom du théorème*).
 - Fonctions dérivables. Caractérisation des fonctions constantes, croissantes et décroissantes sur un intervalle. Cas des fonctions strictement monotones.
 - Tableaux de variations.
- Fonctions usuelles
 - Fonctions affines. Équation d'une droite passant par deux points du plan.
 - Définition et propriétés des fonctions puissances d'un nombre entier, polynomiales, rationnelles, cosinus, sinus, tangente, exponentielle, logarithme népérien (dont les croissances comparées), valeur absolue, partie entière.
 - Puissances à exposant réel (définitions et propriétés). Fonction puissance d'un réel (prolongée en 0, continue/dérivable en 0 selon α). Exponentielle de base a .