Programme de colles - Semaine n° 19

du 11 au 17 février 2019

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

18 – Introduction aux espaces vectoriels

19 – Analyse asymptotique

20 – Dérivées successives et formules de Taylor (*en cours uniquement*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Donner la définition d'un sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-e.v E.
- Montrer que, si $F_1, \dots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-e.v E, alors l'intersection $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} F_i$ est encore un sous espace vectoriel de E.
- Montrer que, si $x_1, \dots, x_n$ désignent des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v E, alors $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est un sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $x_1, \dots, x_n$.
- Donner la définition d'une famille[1] génératrice, d'une famille libre et d'une famille liée d'un $\mathbb{K}$-e.v E.
- Montrer l'existence et unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base.
- Énoncer (sans démonstration mais sans oublier les hypothèses) la formule de Leibniz.
- Énoncer (sans oublier les hypothèses) et démontrer la formule de Taylor avec reste intégral.
- Énoncer (sans démonstration mais sans oublier les hypothèses) la formule de Taylor-Lagrange.
- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x$.

Prévisions pour la semaine 20 : chapitre 19, chapitre 20, chapitre 21 (développements limités, en cours uniquement).

1. Conformément au programme, on ne considère que des familles composées d'un nombre fini de vecteurs.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 18 - Introduction aux espaces vectoriels

cf. programme de la semaine 18.

Chapitre 19 - Analyse asymptotique

- Négligeabilité
  - — Suite négligeable devant une autre. Notation $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$. Fonction négligeable devant une autre au voisinage d'un point. Notation $f \underset{x_0}{=} o(g)$ ou $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$.
  - — Lien des petits o avec les limites.
  - — Comparaison de suites et fonctions usuelles. Croissances comparées. Échelle des suites tendant vers 0 ou vers $+\infty$ (vitesse de convergence).
  - — Propriétés : transitivité, compatibilité avec le produit, multiplication par une constante non nulle, par une suite (resp. fonction). Substitution (composition à droite) par une fonction ou par une suite dans un petit o.

    On n'écrit jamais $o(0)$. On ne somme pas deux petits o (sauf si ce sont les mêmes à une constante multiplicative non nulle près). On ne compose jamais un petit o à gauche.
- Equivalents.
  - — Suites équivalents. Notation $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Fonctions équivalentes au voisinage d'un point. Notation $f \underset{x_0}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$.
  - — Lien avec les petits o ($u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n)$ et $f \sim g \iff f = g + o(g)$).
  - — Propriétés : réflexivité, symétrie, transitivité, compatibilité avec le produit, le quotient, les puissances. Lien entre équivalence et limite. Substitution (composition à droite) par une fonction ou par une suite dans un équivalent.

    On n'écrit jamais ~ 0. On ne somme jamais d'équivalents (ou on repasse par les petits o). A part l'élévation à une puissance, on ne compose jamais des équivalents à gauche par une fonction.
  - — Équivalents de polynômes en 0 et en $+\infty$. Équivalents quand n tend vers $+\infty$ de $P(1/n)$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$.
  - — Si f est dérivable sur un voisinage de 0 et $f'(0) \neq 0$, alors $f(x) - f(0) \underset{0}{\sim} xf'(0)$.
  - — Équivalents usuels : $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$, $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$ si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$, $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$, $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$ et $\text{Arctan}(x) \underset{0}{\sim} x$.
  - — Si $u(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$, alors $\ln(1+u(x)) \underset{x_0}{\sim} u(x)$, $e^{u(x)} - 1 \underset{x_0}{\sim} u(x)$, $(1+u(x))^\alpha - 1 \underset{x_0}{\sim} \alpha u(x)$ si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $1 - \cos(u(x)) \underset{x_0}{\sim} \dfrac{u(x)^2}{2}$, $\sin(u(x)) \underset{x_0}{\sim} u(x)$, $\tan(u(x)) \underset{x_0}{\sim} u(x)$ et $\text{Arctan}(u(x)) \underset{x_0}{\sim} u(x)$.
  - — Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$, $e^{u_n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} u_n$, $(1+u_n)^\alpha - 1 \underset{+\infty}{\sim} \alpha u_n$ si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $1 - \cos(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2}{2}$, $\sin(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$, $\tan(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$ et $\text{Arctan}(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$.
  - — Formule de Stirling.