Programme de colles - Semaine n^{o} 18

du 4 au 10 février 2019

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

16 – Systèmes linéaires

17 – Matrices

18 – Introduction aux espaces vectoriels

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Montrer que le produit de matrices est associatif.
- Calculer les puissances successives de la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

  On pourra utiliser le fait que, si on note $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1, alors $J_n^k = n^{k-1} J_n$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
- Donner (sans démonstration) une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ soit inversible et préciser A^{-1}.
- Calculer l'inverse d'une matrice de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$ donnée par l'examinateur (via la méthode de Gauss-Jordan).
- Donner la définition d'un sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-e.v E.
- Montrer que, si $F_1, \ldots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-e.v E, alors l'intersection $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} F_i$ est encore un sous espace vectoriel de E.
- Montrer que, si $x_1, \ldots, x_n$ désignent des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v E, alors $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ est un sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$.
- Donner la définition d'une famille[1] génératrice, d'une famille libre et d'une famille liée d'un $\mathbb{K}$-e.v E.
- Montrer l'existence et unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base.

Prévisions pour la semaine 19 : chapitre 18, chapitre 19 (analyse asymptotique).

1. Conformément au programme, on ne considère que des familles composées d'un nombre fini de vecteurs.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 16 - Systèmes linéaires

cf. programme de la semaine 17.

Chapitre 17 - Matrices

cf. programme de la semaine 17.

Chapitre 18 - Introduction aux espaces vectoriels

- Notion d'espace vectoriel.
  - Définitions et premières propriétés.
  - Exemples usuels. Définition de l'addition et de la multiplication externe sur $\mathbb{K}^n$ et sur $\mathcal{F}(A, E)$ où A est un ensemble quelconque et E un $\mathbb{K}$-e.v. Les ensembles $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{F}(A, E)$ sont des $\mathbb{K}$-e.v (en particulier l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles est un $\mathbb{R}$-e.v et les ensembles $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}[X]$ sont des $\mathbb{K}$-e.v).
  - Famille finie de vecteurs. Combinaisons linéaires de vecteurs.
- Sous-espaces vectoriels
  - Définitions équivalentes. Si $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v et F un s.e.v de E, alors $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v.
  - Exemples de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
  - Intersection de sous-espaces vectoriels. Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs. Caractérisation de $\mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n)$. Opérations élémentaires sur les vecteurs de $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$.
- Familles libres, génératrices et bases
  - Familles génératrices.
  - Familles liées, familles libres. Vecteurs colinéaires.
  - Bases. Coordonnées d'un vecteur dans une base. Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}_n[X]$.