Programme de colles - Semaine n° 17

du 28 janvier au 3 février 2019

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

15 – Polynômes réels ou complexes

16 – Systèmes linéaires

17 – Matrices

18 – Introduction aux espaces vectoriels (en cours uniquement)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Calculer le reste de la division euclidienne de X^n+1 par X^2+1 pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. En déduire que X^2+1 divise $X^{2018}+1$.
- Montrer l'unicité (en admettant l'existence) des polynômes de Tchebychev [1].
- Donner la définition de l'ordre de multiplicité d'une racine a d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ et énoncer (sans démonstration) la caractérisation par la factorisation d'une puissance de $X-a$.
- Énoncer (sans démonstration) le théorème de D'Alembert-Gauss puis les théorèmes de factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ (avec une phrase et une formule) et dans $\mathbb{R}[X]$ (avec une phrase seulement).
- Factoriser X^4+1 dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
- Montrer que le produit de matrices est associatif.
- Calculer les puissances successives de la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

  On pourra utiliser le fait que, si on note $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1, alors $J_n^k = n^{k-1} J_n$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
- Donner (sans démonstration) une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ soit inversible et préciser A^{-1}.
- Calculer l'inverse d'une matrice de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$ donnée par l'examinateur (via la méthode de Gauss-Jordan).
- Donner la définition d'un sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-e.v E.
- Donner la définition de $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$ lorsque $x_1,\dots,x_n$ sont des vecteurs de E. Donner la définition d'une famille[3] génératrice d'un $\mathbb{K}$-e.v E.
- Donner la définition d'une famille[3] libre et d'une famille liée d'un $\mathbb{K}$-e.v E.

Prévisions pour la semaine 18 : chapitre 16, chapitre 17 et chapitre 18.

1. Il s'agit de la suite de polynômes $(T_n)_{n\geqslant 1}$ telle que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
3. Conformément au programme, on ne considère que des familles composées d'un nombre fini de vecteurs.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 15 - Polynômes réels ou complexes

cf. programme de la semaine 16.

Chapitre 16 - Systèmes linéaires

- Définition d'un système linéaire à n équations et p inconnues à coefficients réels ou complexes
  - Équations, inconnues, coefficients, second membre. Système homogène. Système homogène associé.
  - Systèmes équivalents. Système compatible, incompatible, de Cramer.
- Résolution de systèmes linéaires échelonnés
  - Résolution de systèmes linéaires triangulaires dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls par remontées successives.
  - Pour un système échelonné non triangulaire, on choisit des inconnues auxiliaires que l'on place dans le second membre. On se ramène ainsi à un système triangulaire.
- La méthode du pivot de Gauss
  - Opérations élémentaires : $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ $(\lambda \neq 0)$, $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$, $L_i \to \alpha L_i + \beta L_j$ $(\alpha \neq 0)$.
    Si un système (S') est obtenu à partir d'un système (S) en effectuant une succession d'opérations élémentaires, alors (S) et (S') sont équivalents.
  - Résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.
  - Un système linéaire possède ou bien une unique solution, ou bien aucune, ou bien une infinité.

Chapitre 17 - Matrices

- Ensemble de matrices
  - Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Matrices lignes, colonnes. Matrice nulle. Matrices élémentaires.
  - Somme de matrices, multiplication par un scalaire. Premières propriétés.
  - Produit matriciel. Associativité. Distributivité par rapport au produit. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ n'est pas intègre. Produit d'une matrice par une vecteur colonne. Matrice associée à un système linéaire.
  - Transposée d'une matrice. Transposition d'un produit.
- Matrices carrées
  - Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Matrice nulle O_n. Matrice identité I_n. Le produit n'est pas commutatif. Matrices qui commutent. Matrices diagonales, triangulaires supérieures et inférieures, symétriques, antisymétriques.
  - Puissances de matrices carrées. Formule du binôme de Newton pour deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Polynômes de matrices carrées. Notion de polynôme annulateur. Application au calcul des puissances successives d'une matrice carrée.
- Matrices inversibles
  - Ensemble $GL_n(\mathbb{K})$. Unicité de l'inverse. Inverse d'un produit de matrices inversibles, de la transposée, d'une puissance d'une matrice inversible.
  - Critères d'inversibilité (admis pour le moment) : une matrice inversible à gauche (resp. à droite) est inversible. Critère du noyau. Critère de l'image. Lien avec les systèmes de Cramer.
  - Critère d'inversibilité des matrices triangulaires et diagonales. Calcul de l'inverse d'une matrice : cas des matrices d'ordre 2, utilisation des polynômes annulateurs, méthode de Gauss-Jordan.