Programme de colles - Semaine n° 16

du 21 au 27 janvier 2019

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

14 – Intégration d'une fonction sur un segment

15 – Polynômes réels ou complexes

16 – Systèmes linéaires

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Calculer $\displaystyle\int_0^\pi e^{-t}\cos(t)\,dt$ avec une double intégration par parties.
- Déterminer une primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^3}$ sur $\mathbb{R}$ (avec une IPP [1]).
- Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$ (à l'aide du changement de variable $t=\cos(x)$).
- Déterminer une primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{e^t+e^{-t}}$ sur $\mathbb{R}$ (à l'aide du changement de variable $t=\ln(u)$).
- Définir les sommes de Riemann à pas constants [2] et énoncer le théorème d'approximation [3] dans le cas de fonctions de classe C^1.
- Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}-\ln(2)\right| \leqslant \dfrac{1}{2n}$.
- Calculer le reste de la division euclidienne de X^n+1 par X^2+1 pour tout $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. En déduire que X^2+1 divise $X^{2018}+1$.
- Montrer l'unicité (en admettant l'existence) des polynômes de Tchebychev [4].
- Donner la définition de l'ordre de multiplicité d'une racine a d'un polynôme $P\in\mathbb{K}[X]$ et énoncer (sans démonstration) la caractérisation par la factorisation d'une puissance de $X-a$.
- Énoncer (sans démonstration) le théorème de D'Alembert-Gauss puis les théorèmes de factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ (avec une phrase et une formule) et dans $\mathbb{R}[X]$ (avec une phrase seulement).
- Factoriser X^4+1 dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
- Résoudre un système linéaire à trois équations et trois inconnues [5], donné par l'examinateur.

Prévisions pour la semaine 17 : chapitre 15, chapitre 16, chapitre 17 (matrices) et début du chapitre 18 (espaces vectoriels).

---

1. On fixe $x\in\mathbb{R}$. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}$. A l'aide d'une IPP, on trouve alors une relation entre I_{n+1} et I_n, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
2. $S_n(f)=\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)$ et $T_n(f)=\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)$ uniquement, avec f définie sur $[a,b]$.
3. Si f est de classe C^1 alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\left|S_n(f)-\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{2n}\displaystyle\max_{[a,b]}|f'|$.
4. Il s'agit de la suite de polynômes $(T_n)_{n\geqslant 1}$ telle que, pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $\theta\in\mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta))=\cos(n\theta)$.
5. La méthode du pivot de Gauss doit être respectée à la lettre pour ramener le système à un système échelonné équivalent. On ne fera pas d'inversion de ligne "gratuitement" (seulement lorsque le pivot est nul). Ensuite on peut terminer la résolution par remontées successives.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 14 - Intégration d'une fonction sur un segment

cf. programme de la semaine 15.

Chapitre 15 - Polynômes réels ou complexes

- Ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
  - Les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ sont définis en tant qu'applications polynomiales de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. Si $k \in \mathbb{N}$, X^k désigne l'application $x \in \mathbb{K} \longmapsto x^k \in \mathbb{K}$. La notation $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ n'est pas unique mais les coefficients de P sont uniquement déterminés. Monôme. Degré d'un polynôme. Notation $\mathbb{K}_n[X]$.
  - Opérations algébriques dans $\mathbb{K}[X]$. Dérivée d'un polynôme. Degré et coefficient dominant de $P + Q$, λP, PQ, $P \circ Q$ et P' lorsque $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$. Polynômes inversibles.
- Division euclidienne de polynômes
  - Théorème de la division euclidienne. Méthode algorithmique.
  - Diviseurs et multiples dans $\mathbb{K}[X]$. Notion de polynôme irréductible.
- Racines d'un polynôme et factorisation
  - a est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ (unique) tel que $P = (X - a)Q$.
  - Tout polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ admet au plus n racines deux à deux distinctes.
    Un polynôme de degré $\mathbb{K}_n[X]$ admettant au moins $n + 1$ racines deux à deux distinctes est le polynôme nul.
    Un polynôme de $P \in \mathbb{K}[X]$ possède une infinité de racines dans $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si $P = 0$.
  - Factorisation d'un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ admettant n racines distinctes deux à deux. Notion de polynôme scindé.
  - Ordre de multiplicité d'une racine. Une racine $a \in \mathbb{K}$ de $P \in \mathbb{K}[X]$ est de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ (unique) tel que $P = (X - a)^k Q$ et $Q(a) \neq 0$.
    Une racine $a \in \mathbb{K}$ de $P \in \mathbb{K}[X]$ est simple si et seulement si $P'(a) \neq 0$.
  - Théorème de d'Alembert-Gauss. Factorisation en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ (tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé). CNS de divisibilité avec les racines.
  - Si $a \in \mathbb{C}$ est une racine de $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $\overline{a}$ est une racine de P de même ordre de multiplicité que a. Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair admet une racine réelle. Factorisation en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ (tout polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit comme produit de polynômes de degré 1 et de polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif).

Chapitre 16 - Systèmes linéaires

- Définition d'un système linéaire à n équations et p inconnues à coefficients réels ou complexes
  - Équations, inconnues, coefficients, second membre. Système homogène. Système homogène associé.
  - Systèmes équivalents. Système compatible, incompatible, de Cramer.
- Résolution de systèmes linéaires échelonnés
  - Résolution de systèmes linéaires triangulaires dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls par remontées successives.
  - Pour un système échelonné non triangulaire, on choisit des inconnues auxiliaires que l'on place dans le second membre. On se ramène ainsi à un système triangulaire.
- La méthode du pivot de Gauss
  - Opérations élémentaires : $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ $(\lambda \neq 0)$, $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$, $L_i \to \alpha L_i + \beta L_j$ $(\alpha \neq 0)$.
    Si un système (S') est obtenu à partir d'un système (S) en effectuant une succession d'opérations élémentaires, alors (S) et (S') sont équivalents.
  - Résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.
  - Un système linéaire possède ou bien une unique solution, ou bien aucune, ou bien une infinité.