Programme de colles - Semaine n° 15

du 14 au 20 janvier 2019

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

13 – Dérivation de fonctions réelles de la variable réelle

14 – Intégration d'une fonction sur un segment

15 – Polynômes réels ou complexes (*en cours uniquement*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-t}\cos(t)\,dt$ avec une double intégration par parties.
- Déterminer une primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^3}$ sur $\mathbb{R}$ (avec une IPP [1]).
- Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$ (à l'aide du changement de variable $t=\cos(x)$).
- Déterminer une primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{e^t+e^{-t}}$ sur $\mathbb{R}$ (à l'aide du changement de variable $t=\ln(u)$).
- Définir les sommes de Riemann à pas constants [2] et énoncer le théorème d'approximation [3] dans le cas de fonctions de classe C^1.
- Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}-\ln(2)\right| \leqslant \frac{1}{2n}$.
- Calculer le reste de la division euclidienne de X^n+1 par X^2+1 pour tout $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. En déduire que X^2+1 divise $X^{2018}+1$.
- Montrer l'unicité (en admettant l'existence) des polynômes de Tchebychev [4].
- Donner la définition de l'ordre de multiplicité d'une racine a d'un polynôme $P\in\mathbb{K}[X]$ et énoncer (sans démonstration) la caractérisation par la factorisation d'une puissance de $X-a$.
- Énoncer (sans démonstration) le théorème de D'Alembert-Gauss puis les théorèmes de factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ (avec une phrase et une formule) et dans $\mathbb{R}[X]$ (avec une phrase seulement).
- Factoriser X^4+1 dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Prévisions pour la semaine 16 : chapitre 14, chapitre 15 et chapitre 16 (systèmes linéaires).

---

1. On fixe $x\in\mathbb{R}$. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}$. A l'aide d'une IPP, on trouve alors une relation entre I_{n+1} et I_n, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
2. $S_n(f)=\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)$ et $T_n(f)=\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)$ uniquement, avec f définie sur $[a,b]$.
3. Si f est de classe C^1 alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\left|S_n(f)-\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n}\max_{[a,b]}|f'|$.
4. Il s'agit de la suite de polynômes $(T_n)_{n\geqslant 1}$ telle que, pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $\theta\in\mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta))=\cos(n\theta)$.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 13 - Dérivation d'une fonction réelle à valeurs réelles

cf. programme de la semaine 13.

Chapitre 14 - Intégration d'une fonction sur un segment

- Primitive d'une fonction sur un intervalle
  - Unicité à une constante près. Unicité de la primitive s'annulant en un certain point.
  - Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.
  - Primitives usuelles.
- Intégrale d'une fonction continue sur un segment
  - Définition en tant que différence des primitives de la fonction en chaque borne.
    Notation $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.
  - Relation de Chasles. Linéarité. Positivité (et cas d'une intégrale nulle). Croissance.
    Inégalité de la moyenne. Inégalité triangulaire.
  - Extension au cas des fonctions continues par morceaux.
  - Plan d'étude d'une fonction définie par une intégrale.
- Intégration par parties.
- Changement de variables
  - Conformément au programme, tout changement de variable non affine devra être indiqué.
  - Intégrales de fonctions paires et impaires sur un segment centré en 0.
- Sommes de Riemann à pas constants
  - Définition des sommes de Riemann à gauche et à droite.
  - Convergence des sommes de Riemann dans le cas des fonctions continues.
    Vitesse de convergence dans le cas C^1.
  - Interprétation géométrique en terme d'aire : Méthodes des rectangles et des trapèzes.

Chapitre 15 - Polynômes réels ou complexes

- Ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
  - Les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ sont définis en tant qu'applications polynomiales de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. Si $k \in \mathbb{N}$, X^k désigne l'application $x \in \mathbb{K} \longmapsto x^k \in \mathbb{K}$. La notation $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ n'est pas unique mais les coefficients de P sont uniquement déterminés. Monôme. Degré d'un polynôme. Notation $\mathbb{K}_n[X]$.
  - Opérations algébriques dans $\mathbb{K}[X]$. Dérivée d'un polynôme. Degré et coefficient dominant de $P+Q$, λP, PQ, $P \circ Q$ et P' lorsque $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$. Polynômes inversibles.
- Division euclidienne de polynômes
  - Théorème de la division euclidienne. Méthode algorithmique.
  - Diviseurs et multiples dans $\mathbb{K}[X]$. Notion de polynôme irréductible.
- Racines d'un polynôme et factorisation
  - a est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ (unique) tel que $P = (X-a)Q$.
  - Tout polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ admet au plus n racines deux à deux distinctes.
    Un polynôme de degré $\mathbb{K}_n[X]$ admettant au moins $n+1$ racines deux à deux distinctes est le polynôme nul.
    Un polynôme de $P \in \mathbb{K}[X]$ possède une infinité de racines dans $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si $P = 0$.
  - Factorisation d'un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ admettant n racines distinctes deux à deux. Notion de polynôme scindé.
  - Ordre de multiplicité d'une racine. Une racine $a \in \mathbb{K}$ de $P \in \mathbb{K}[X]$ est de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ (unique) tel que $P = (X-a)^k Q$ et $Q(a) \neq 0$.
    Une racine $a \in \mathbb{K}$ de $P \in \mathbb{K}[X]$ est simple si et seulement si $P'(a) \neq 0$.
  - Théorème de d'Alembert-Gauss. Factorisation en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ (tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé). CNS de divisibilité avec les racines.
  - Si $a \in \mathbb{C}$ est une racine de $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $\overline{a}$ est une racine de P de même ordre de multiplicité que a. Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair admet une racine réelle. Factorisation en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ (tout polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit comme produit de polynômes de degré 1 et de polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif).