Programme de colles - Semaine n$^{\text{o}}$ 13

du 17 au 23 décembre 2018

Ce programme est donné de façon indicative... il n'y a pas de colles cette semaine.

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

12 – Étude globale de fonctions : continuité sur un intervalle

13 – Dérivation de fonctions réelles de la variable réelle

14 – Intégration d'une fonction sur un segment (*en cours uniquement*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Énoncer (sans démonstration) le théorème de dérivation des fonctions réciproques.
- Sans démonstration, donner la définition de la fonction Arctan, tracer sa courbe représentative et énoncer ses propriétés (*y compris la dérivabilité*).
- Énoncer (sans démonstration) le théorème de Rolle. Illustrer avec un joli dessin.
- Énoncer (sans démonstration) le théorème des accroissements finis. Illustrer avec un joli dessin.
- Énoncer (sans démonstration) l'inégalité des accroissements finis (les deux versions).
- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$. En déduire que $\dfrac{1}{\ln(n)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
- Calculer $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
- Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-t} \cos(t)\, dt$ avec une double intégration par parties.
- Déterminer une primitive de Arctan sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer une primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^3}$ sur $\mathbb{R}$.

⚠ **Pas de colles la semaine 14.**

Prévisions pour la semaine 15 : chapitre 13, chapitre 14 et chapitre 15 (Polynômes – en cours uniquement).

Détails des chapitres au programme

Chapitre 12 - Étude globale de fonctions : continuité sur un intervalle

cf. programme de la semaine 12.

Chapitre 13 - Dérivation d'une fonction réelle à valeurs réelles

- Fonction dérivable en un point.
  - Taux d'accroissement. Dérivée. Tangente à la courbe. Tangente verticale.
  - La dérivabilité implique la continuité.
  - Dérivée à droite et à gauche. Notion de demi-tangente.
  - Opérations algébriques sur les fonctions dérivables en un point. Dérivée d'une composée. Dérivée de la réciproque d'une bijection.
- Fonctions dérivées.
  - Fonction dérivable et fonction dérivée. Notation $D^1(I, \mathbb{R})$. Fonction de classe C^1. Notation $C^1(I, \mathbb{R})$.
  - Dérivation des fonctions usuelles, dont Arctan.
- Accroissements finis.
  - Extremum local et dérivée. Théorème de Rolle.
  - Théorème des accroissements finis. Inégalités des accroissements finis.
  - Prolongement d'une dérivée (condition suffisante de dérivabilité). Exemple de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
  - Application à l'étude de suites récurrentes.
- Variations des fonctions dérivables.
  - Lien entre variation d'une fonction dérivable sur un intervalle et le signe de sa dérivée. Cas d'une dérivée identiquement nulle.
  - Si f est dérivable sur un intervalle I et $f'(x) > 0$ pour tout x dans I, sauf éventuellement en un nombre fini d'entre eux, alors f est strictement croissante sur I.
  - Application : démonstration des croissances comparées.

Chapitre 14 - Intégration d'une fonction sur un segment

- Primitive d'une fonction sur un intervalle
  - Unicité à une constante près. Unicité de la primitive s'annulant en un certain point.
  - Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.
  - Primitives usuelles.
- Intégrale d'une fonction continue sur un segment
  - Définition en tant que différence des primitives de la fonction en chaque borne.
    Notation $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.
  - Relation de Chasles. Linéarité. Positivité (et cas d'une intégrale nulle). Croissance.
    Inégalité de la moyenne. Inégalité triangulaire.
  - Extension au cas des fonctions continues par morceaux.
  - Plan d'étude d'une fonction définie par une intégrale.
- Intégration par parties.
- Changement de variables
  - Conformément au programme, tout changement de variable non affine devra être indiqué.
  - Intégrales de fonctions paires et impaires sur un segment centré en 0.
- Sommes de Riemann à pas constants
  - Définition des sommes de Riemann à gauche et à droite.
  - Convergence des sommes de Riemann dans le cas des fonctions continues.
    Vitesse de convergence dans le cas C^1.
  - Interprétation géométrique en terme d'aire : Méthodes des rectangles et des trapèzes.