Programme de colles - Semaine n° 12

du 10 au 16 décembre 2018

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

11 – Étude locale de fonctions : limites et continuité en un point.

12 – Étude globale de fonctions : continuité sur un intervalle

13 – Dérivation de fonctions réelles de la variable réelle

- Étude de dérivabilité, calcul de dérivées
- Théorème de Rolle, égalité et inégalité des accroissement finis (*en cours uniquement*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Énoncer (sans démonstration) le théorème de la limite monotone pour les fonctions croissantes.
- Énoncer (sans démonstration) les trois formulations du théorème des valeurs intermédiaires.
- Montrer qu'un polynôme à coefficients réels et de degré impair admet au moins une racine réelle.
- Énoncer (sans démonstration) le théorème des bornes atteintes et le résultat sur l'image d'un segment.
- Énoncer (sans démonstration) théorème de la bijection.
- Énoncer (sans démonstration) le théorème de dérivation des fonctions réciproques.
- Sans démonstration, donner la définition de la fonction Arctan, tracer sa courbe représentative et énoncer ses propriétés (*y compris la dérivabilité*).
- Énoncer (sans démonstration) le théorème de Rolle. Illustrer avec un joli dessin.
- Énoncer (sans démonstration) le théorème des accroissements finis. Illustrer avec un joli dessin.
- Énoncer (sans démonstration) l'inégalité des accroissements finis (les deux versions).
- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$. En déduire que $\dfrac{1}{\ln(n)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
- Calculer $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

⚠ **Pas de colles les semaines 13 et 14.**

Prévisions pour la semaine 15 : chapitre 13 et chapitre 14 (Intégrales sur un segment).

Détails des chapitres au programme

Chapitre 11 - Étude locale de fonctions : limites et continuité en un point

cf. programme de la semaine 11.

Chapitre 12 - Étude globale de fonctions : continuité sur un intervalle

- Fonctions réelles continues sur un intervalle.
  - Notation $C^0(I,\mathbb{R})$. Continuité des fonctions usuelles.
  - Opérations algébriques sur les fonctions continues. Composée de fonctions continues.
  - Restriction de fonctions continues. Fonctions continues par morceaux.
- Théorème des valeurs intermédiaires.
  - *TVI version 1 :* Si f est continue sur $[a,b]$ et si t est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c)=t$.
  - *TVI version 2 :* Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Notons
  $$M = \begin{cases} \sup\limits_{x\in I} f(x) & \text{si } f \text{ est majorée,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad m = \begin{cases} \inf\limits_{x\in I} f(x) & \text{si } f \text{ est minorée,} \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$
  Si f est continue sur I et si $t \in]m,M[$, alors il existe $c \in I$ tel que $f(c)=t$.
  - *TVI version 3 :* L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
  - Méthode de preuve par dichotomie.
- Le théorème des bornes atteintes.
  - Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
  - L'image d'un segment par une fonction continue est un segment. Plus précisément, si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$, alors $f([a,b]) = [m,M]$ où $m = \min\limits_{[a,b]} f$ et $M = \max\limits_{[a,b]} f$.
- Le théorème de la bijection.
  - Si f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$. De plus la réciproque f^{-1} est continue sur I et strictement monotone sur I de même sens de monotonie que f. Enfin, dans un repère orthonormé, les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.
  - Forme de $f(I)$ lorsque f est monotone et continue sur I.
  - Fonction Arctan (définition, monotonie, limites, continuité, parité, courbe représentative).

Chapitre 13 - Dérivation d'une fonction réelle à valeurs réelles

- Fonction dérivable en un point.
  - Taux d'accroissement. Dérivée. Tangente à la courbe. Tangente verticale.
  - La dérivabilité implique la continuité.
  - Dérivée à droite et à gauche. Notion de demi-tangente.
  - Opérations algébriques sur les fonctions dérivables en un point. Dérivée d'une composée. Dérivée de la réciproque d'une bijection.
- Fonctions dérivées.
  - Fonction dérivable et fonction dérivée. Notation $D^1(I,\mathbb{R})$. Fonction de classe C^1. Notation $C^1(I,\mathbb{R})$.
  - Dérivation des fonctions usuelles, dont Arctan.
- Accroissements finis.
  - Extremum local et dérivée. Théorème de Rolle.
  - Théorème des accroissements finis. Inégalités des accroissements finis.
  - Prolongement d'une dérivée (condition suffisante de dérivabilité). Exemple de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
  - Application à l'étude de suites récurrentes.
- Variations des fonctions dérivables.
  - Lien entre variation d'une fonction dérivable sur un intervalle et le signe de sa dérivée. Cas d'une dérivée identiquement nulle.
  - Si f est dérivable sur un intervalle I et $f'(x)>0$ pour tout x dans I, sauf éventuellement en un nombre fini d'entre eux, alors f est strictement croissante sur I.
  - Application : démonstration des croissances comparées.