Programme de colles - Semaine n$^{\text{o}}$ 11

du 3 au 9 décembre 2018

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

10 – Variables aléatoires finies

11 – Étude locale de fonctions : limites et continuité en un point.

12 – Étude globale de fonctions : continuité sur un intervalle (*en cours uniquement*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Calculer l'espérance et de la variance d'une v.a.r de loi $\mathcal{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$.
- Calculer l'espérance d'une v.a.r de loi $\mathcal{B}(n,p)$.
- Calculer la variance d'une v.a.r de loi $\mathcal{B}(n,p)$ (en supposant connue l'espérance).
- Donner la définition d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue (resp. continue à gauche, continue à droite) en un point $x_0 \in I$.
- Donner trois définitions (choisies par l'examinateur bien sûr) parmi les neuf types de limites d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (limite réelle ou infinie ou un point de I ou en l'infini) ou d'une de leurs éventuelles variantes à gauche et à droite. Illustrer avec un dessin.
- Donner (sans démonstration) les liens entre limites, limites à gauche et limites droite en $x_0 \in \mathbb{R}$ selon que la fonction est définie ou non en x_0.
- Énoncer (sans démonstration) le théorème de la limite monotone pour les fonctions croissantes.
- Énoncer (sans démonstration) les trois formulations du théorème des valeurs intermédiaires.
- Montrer qu'un polynôme à coefficients réels et de degré impair admet au moins une racine réelle.
- Énoncer (sans démonstration) le théorème des bornes atteintes et le résultat sur l'image d'un segment.
- Énoncer (sans démonstration) théorème de la bijection.
- Sans démonstration, donner la définition de la fonction Arctan, tracer sa courbe représentative et énoncer ses premières propriétés (*pas la dérivabilité cette semaine*).

Prévisions pour la semaine 12 : chapitre 11, chapitre 12 et chapitre 13 (Dérivation – en cours uniquement).

Détails des chapitres au programme

Chapitre 10 - Variables aléatoires réelles finies

cf. programme de la semaine 10.

Chapitre 11 - Étude locale de fonctions : limites et continuité en un point

- Limites et continuité
  - Notion de voisinage. Limite finie en un point. Unicité de la limite.
  - Continuité en un point. Prolongement par continuité.
  - Limites et continuité à gauche et à droite. Liens avec les limites et la continuité.
  - Limite infinie en un point. Limite infinie à gauche et à droite. Limites en $\pm\infty$.
- Propriétés générales
  - Image d'une suite convergente vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ par une fonction admettant une limite en ℓ. Image d'une suite convergente par une fonction continue. Limite et continuité d'une fonction composée.
  - Limites et relation d'ordre. Théorèmes d'encadrement.
  - Opérations algébriques sur les limites.
- Théorème de la limite monotone pour les fonctions.
- Asymptotes et branches paraboliques.
- Limites et continuité en un point des fonctions usuelles. Croissances comparées.

Chapitre 12 - Étude globale de fonctions : continuité sur un intervalle

- Fonctions réelles continues sur un intervalle.
  - Notation $C^0(I, \mathbb{R})$. Continuité des fonctions usuelles.
  - Opérations algébriques sur les fonctions continues. Composée de fonctions continues.
  - Restriction de fonctions continues. Fonctions continues par morceaux.
- Théorème des valeurs intermédiaires.
  - *TVI version 1 :* Si f est continue sur $[a, b]$ et si t est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = t$.
  - *TVI version 2 :* Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Notons

$$M = \begin{cases} \sup\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est majorée,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad m = \begin{cases} \inf\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est minorée,} \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

    Si f est continue sur I et si $t \in]m, M[$, alors il existe $c \in I$ tel que $f(c) = t$.
  - *TVI version 3 :* L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
  - Méthode de preuve par dichotomie.
- Le théorème des bornes atteintes.
  - Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
  - L'image d'un segment par une fonction continue est un segment. Plus précisément, si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [m, M]$ où $m = \min\limits_{[a,b]} f$ et $M = \max\limits_{[a,b]} f$.
- Le théorème de la bijection.
  - Si f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$. De plus la réciproque f^{-1} est continue sur I et strictement monotone sur I de même sens de monotonie que f. Enfin, dans un repère orthonormé, les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
  - Forme de $f(I)$ lorsque f est monotone et continue sur I.
  - Fonction Arctan (définition, monotonie, limites, continuité, parité, courbe représentative).