Programme de colles - Semaine n° 10

du 26 novembre au 2 décembre 2018

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

9 – Probabilités sur un univers fini

10 – Variables aléatoires finies

11 – Étude locale de fonctions : limites et continuité en un point (*en cours uniquement*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Donner la définition d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Donner (sans démonstration) un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ modélisant un schéma binomial de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$ (répétition de n expériences de Bernoulli de paramètre p identiques et indépendantes). Calculer ensuite la probabilité d'obtenir exactement $k \in [\![0, n]\!]$ succès.
- Montrer la linéarité (version faible [1]) de l'espérance d'une variable aléatoire réelle (v.a.r) finie.
- Énoncer le théorème de transfert pour les v.a.r finies. Application à l'écriture de la variance avec une somme.
- Montrer la formule de Koenig-Huygens pour les v.a.r finies.
- Calcul de l'espérance et de la variance d'une v.a.r de loi $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$.
- Calcul de l'espérance d'une v.a.r de loi $\mathcal{B}(n, p)$.
- Calcul de la variance d'une v.a.r de loi $\mathcal{B}(n, p)$ (en supposant connue l'espérance).
- Donner la définition d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue (resp. continue à gauche, continue à droite) en un point $x_0 \in I$.
- Donner trois définitions (choisies par l'examinateur bien sûr) parmi les neuf types de limites d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (limite réelle ou infinie ou un point de I ou en l'infini) ou d'une de leurs éventuelles variantes à gauche et à droite. Illustrer avec un dessin.
- Donner (sans démonstration) les liens entre limites, limites à gauche et limites droite en $x_0 \in \mathbb{R}$ selon que la fonction est définie ou non en x_0.
- Énoncer (sans démonstration) le théorème de la limite monotone pour les fonctions croissantes.

Prévisions pour la semaine 11 : chapitre 10, chapitre 11 et chapitre 12 (Continuité sur un intervalle – en cours uniquement).

1. Si X est une v.a.r finie et si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 9 - Probabilités sur un univers fini

cf. programme de la semaine 9.

Chapitre 10 - Variables aléatoires réelles finies

- Variable aléatoire réelle (v.a.r.) X finie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
  - Univers image $X(\Omega)$. Notations $[X = x]$, $[x \leqslant x]$, etc. Système complet associé à une variable aléatoire réelle finie.
  - Loi d'une v.a.r. finie. Égalité en loi (notation $X \overset{\mathscr{L}}{=} Y$). Existence de variable aléatoire réelle finie de loi donnée (notation $X \hookrightarrow \mathscr{L}$).
  - Fonction de répartition d'une v.a.r. finie. La fonction de répartition caractérise la loi.
  - Transfert de v.a.r. finie. Pas de formule général mais cas particuliers des lois de $aX + b$, X^2, $|X|$, e^X, $\ln(X)$, etc.
- Espérance et variance d'une v.a.r. finie
  - Positivité de l'espérance d'une v.a.r. finie positive. Linéarité de l'espérance. Notion de variable centrée.
  - Théorème de transfert.
  - Variance et écart-type. Formule de Koenig-Huygens. $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Notion de v.a.r. finie centrée réduite.
- Lois usuelles
  - Loi certaine et caractérisation avec la variance.
  - Loi uniforme sur une partie finie A de $\mathbb{R}$. Notation $\mathcal{U}(A)$. Espérance et variance dans le cas où $A = [\![a, b]\!]$ avec a et b des réels tels que $a < b$.
  - Loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Notation $\mathcal{B}(p)$. Espérance et variance.
  - Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Notation $\mathcal{B}(n, p)$. Lien avec un schéma binomial. Espérance et variance.

Chapitre 11 - Étude locale de fonctions : limites et continuité en un point

- Limites et continuité
  - Notion de voisinage. Limite finie en un point. Unicité de la limite.
  - Continuité en un point. Prolongement par continuité.
  - Limites et continuité à gauche et à droite. Liens avec les limites et la continuité.
  - Limite infinie en un point. Limite infinie à gauche et à droite. Limites en $\pm\infty$.
- Propriétés générales
  - Image d'une suite convergente vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ par une fonction admettant une limite en ℓ. Image d'une suite convergente par une fonction continue. Limite et continuité d'une fonction composée.
  - Limites et relation d'ordre. Théorèmes d'encadrement.
  - Opérations algébriques sur les limites.
- Théorème de la limite monotone pour les fonctions.
- Asymptotes et branches paraboliques.
- Limites et continuité en un point des fonctions usuelles. Croissances comparées.